Driedeling van een hoek   www.raves.nl

Een klassiek probleem dat de gemoederen in wiskunde-land eeuwenlang heeft geteisterd …

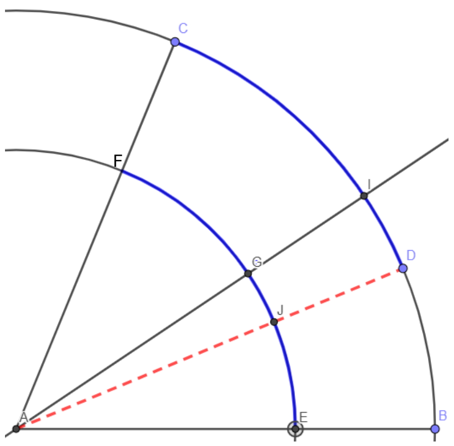
De Klassieke wiskundigen (uit de oude Griekse cultuur) probeerden van alles om een constructie te verzinnen om een zomaar willekeurig gegeven hoek (op papier) in drie gelijke (deel-) hoeken te verdelen, **louter met passer en liniaal**,   … het lukte niemand!

Tegenwoordig heeft iedere (middelbare) scholier een geodriehoek en het eerste wat deze doet is de hoek in kwestie "even opmeten" en al dan niet met de rekenmachine even door 3 delen…

Maar dat is GEEN KLASSIEKE CONSTRUCTIE!
Elders op deze website zie je constructies zoals die van François Viète waar je diep van onder de indruk geraakt … als je alles al snapt!
Maar daar gaat deze site eigenlijk niet over! Wij proberen zoveel mogelijk "analytische meetkunde" toe te passen, met een slim gekozen assenstelsel en verder in de sfeer van Descartes… pure algebra!

En dat lukt nou net **niet** bij (onbekende) hoeken…. uitzonderingen als 30, 45 en 60 graden daargelaten. En tja als je het aantal graden van de te verdelen hoek al weet, dan is het een rekenkwestie maar dat heeft niets te maken met meetkunde (wiskunde en al helemaal niets met een "constructie (met passer en liniaal)" van doen!
Kijk eens naar het volgende plaatje:

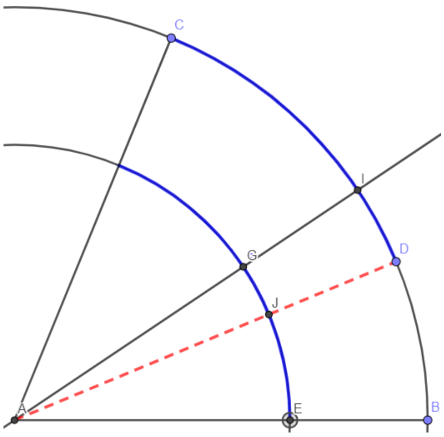
Hier zie je een hoek beschreven door boog BC en hoekpunt A. Natuurlijk kun je met passer en liniaal van zijde AB een derde en 2/3-deel nemen (en construeren). Denk eraan! Je mag niks opmeten! En als je even nadenkt dan zie je dat de booglengte van E naar F precies dezelfde lengte heeft als van C naar D (er is immers twee-derde deel genomen: AE = 2/3 van AB)…
maar … de "kromming" van de kleine cirkel is veel "groter" dan die van de grote! … anders!



Ook René Descartes zag wel dat hoeken niet "braaf luisterden" naar coördinaten en hij introduceerde zelfs het begrip "kromming" … om nog "iets te redden"…

Maar als je het aantal graden of radialen niet weet … dan houdt het op!

Tja, is het mogelijk om die booglengte van E naar F op te meten en af te passen op de grotere boog van B naar C?
NEE.
Helaas ! Je zou een soort wieltje moeten hebben om van E naar F te rollen en die “gerolde” afstand af/op te meten om de boog van C naar .... D af te zetten.
En dit is wat men in zeer oude beschavingen dik 30 000 jaar geleden dan ook deden; landmeters heden-ten-dage overigens nog steeds! Dan zie je een man met een oranje vestje met een stok waarop een wieltje lopen en meten...



Hiernaast zie je nogmaals het figuur waarbij je een “trisectie” zou moeten zien!
Het probleem is dat we met passer en liniaal NIET een booglengte van een cirkel met grotere kromming kunnen afpassen op een andere cirkel...

$\angle$BAD = $\frac{1}{3}$ van $\angle$ BAC en de blauwe boogjes hebben (kennelijk) dezelfde lengte!
Voor het oog lijkt dat niet helemaal exact!

Wat kan men nog wel? Welnu: de aanpak volgen zoals in de Stelling van Raves:

Neem de bissectrices om en om naar boven en naar beneden zoals in de reeks:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots$$

... en na enkele stappen vind je een aardige benadering (met uit te rekenen precisie) voor de gevraagde hoek.
Nee dit is niet met een simpel stappenplan construeerbaar....
Het lijkt een beetje op de Stelling van Raves ... na een voldoende groot aantal stappen kom je (zeer) dicht bij een “limiet” en in het bovenstaande geval is die limiet : $\frac{2}{3}$ (van de booglengte BC) en kom je uiteindelijk terecht in punt D ... waar de hoek precies een-derde is van hoek BAC.

Klik eens op de Geogebra-versie waarbij je de punten B en C kunt “verslepen” ...
https://www.geogebra.org/classic/fbzbpswj

Dat die deellijnen bestaan in een willekeurige driehoek ABC leidde tot een fraaie **Stelling van Morley**, die beslist NIET cartesisch te bewijzen is!
Hieronder zie je een -interactieve- link die alles verduidelijkt: (sleep ook hier B en C naar elders)
https://www.geogebra.org/m/xd4nqyrt

Plezier hierbij!
www.raves.nl