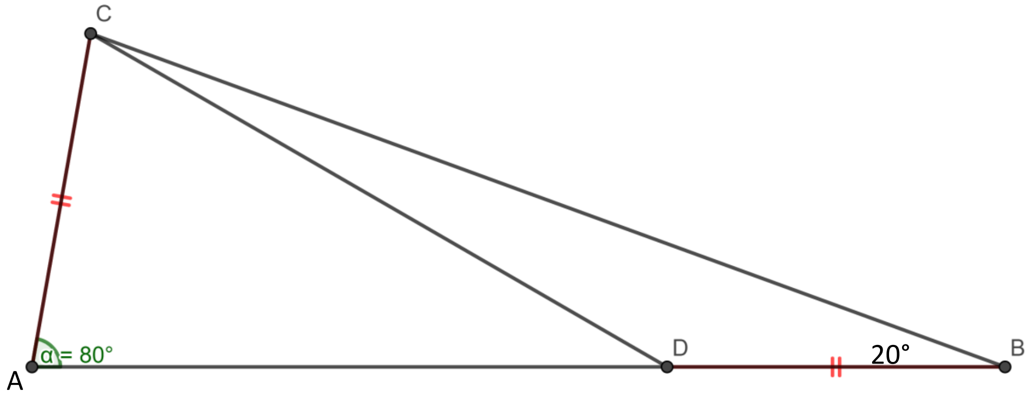
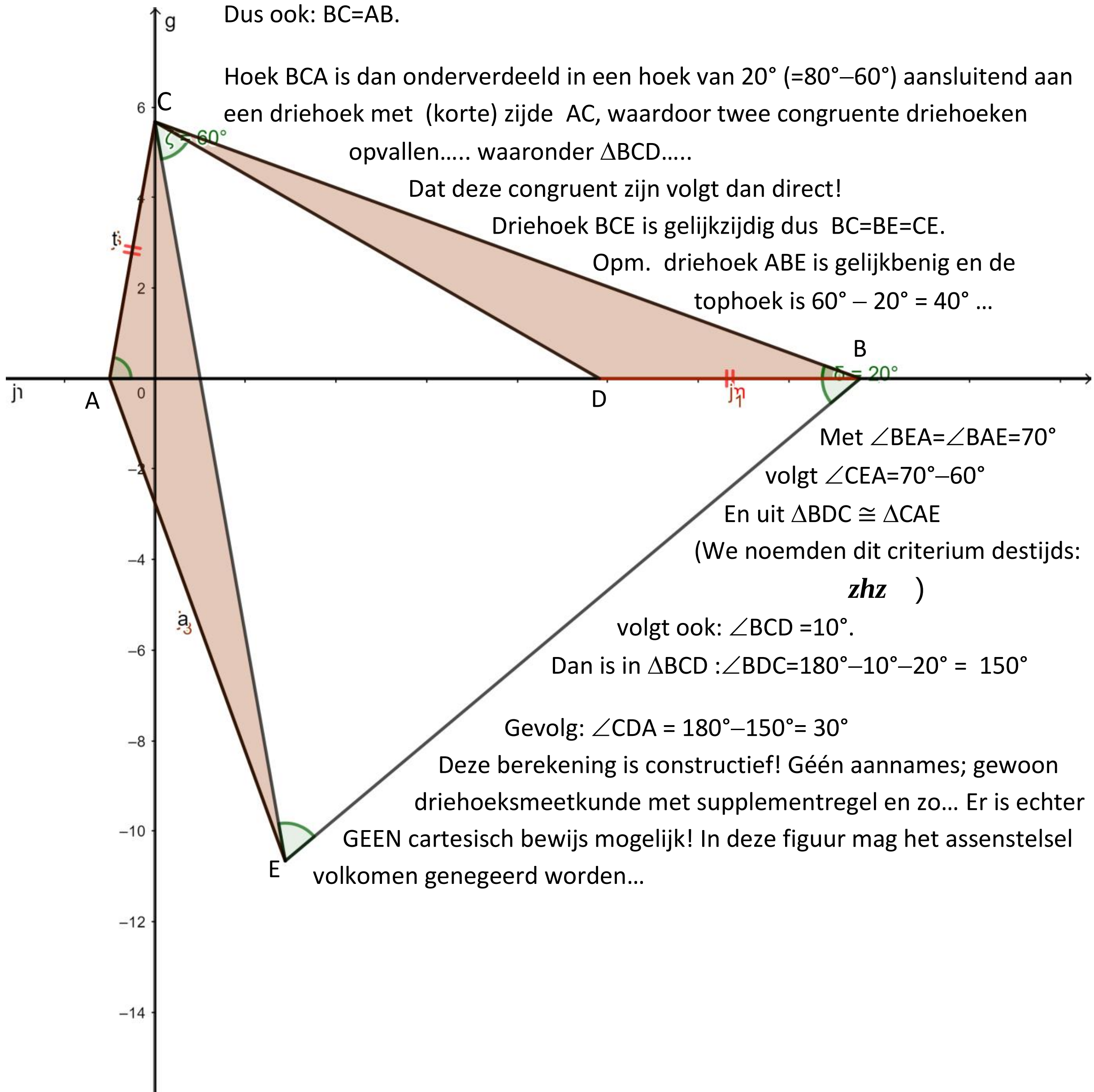
Een miniatuur van Tijn Legierse en Daniël van Olphen (V5 wisk B in 2020)

Gegeven is een driehoek ABC met ∠A=80° en ∠B=20° . Verder ligt punt D op zijde AB met BD=AC.
….zoals in de schets hieronder… dus met D tussen A en B…
Opdracht: Bereken ∠CDA .



Hoekgrootten zijn niet makkelijk te vangen in een cartesische berekening. Moeten we nu noodgedwongen onze toevlucht nemen tot listige meetkunde? Tja….

Leerlingen uit een 5-VWO-klas (aan wie ik les gaf) hadden een briljante vondst:
Roteer zijde CB rond punt B over 60°… EN… merk op dat driehoek ABC sowieso een gelijkbenige driehoek is! De som van de hoeken van de (elke) driehoek is 180° dus houd je voor ∠BCA: 80° over.



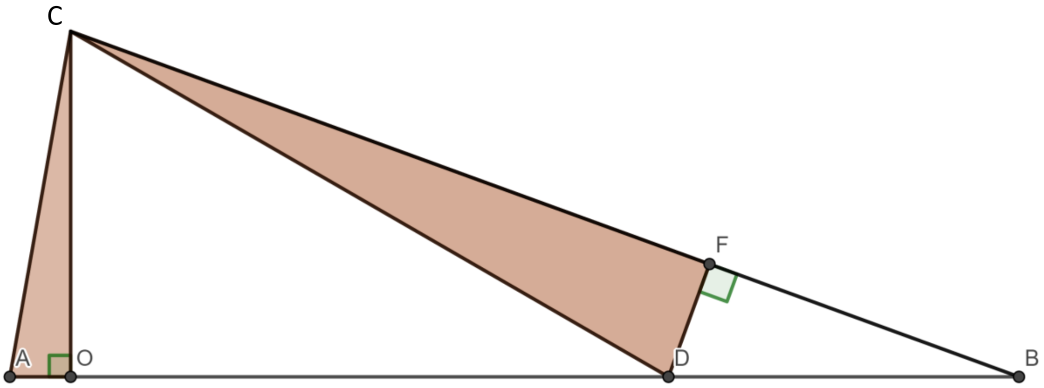
Dus ook: BC=AB.

Hoek BCA is dan onderverdeeld in een hoek van 20° (=80°–60°) aansluitend aan een driehoek met (korte) zijde AC, waardoor twee congruente driehoeken opvallen….. waaronder ΔBCD…..
Dat deze congruent zijn volgt dan direct!
Driehoek BCE is gelijkzijdig dus BC=BE=CE.
Opm. driehoek ABE is gelijkbenig en de tophoek is 60° – 20° = 40° …

Met ∠BEA=∠BAE=70°
volgt ∠CEA=70°–60°
En uit ΔBDC ≅ ΔCAE
(We noemden dit criterium destijds: ***zhz***)
volgt ook: ∠BCD =10°.
Dan is in ΔBCD :∠BDC=180°–10°–20° = 150°

Gevolg: ∠CDA = 180°–150°= 30°
Deze berekening is constructief! Géén aannames; gewoon driehoeksmeetkunde met supplementregel en zo… Er is echter GEEN cartesisch bewijs mogelijk! In deze figuur mag het assenstelsel volkomen genegeerd worden…

In de figuur hieronder zie je ook geen assenstelsel; louter de gegeven punten en driehoeken:



Wèl zie je de hoogtelijn uit punt C loodrecht op zijde AB en verder die vanuit D loodrecht op BC.

De voetpunten van deze hoogtelijnen noemen we O (zoals "met assenstelsel") en punt F.
Met ∠A=80° en ∠B=20 wordt (met ∠AOC=90°) ∠ACO=10°

Te bewijzen: ∠CDA = 30°

Welnu ΔBFD ~ ΔBOC vanwege de hoeken van 20° en 90°. Dus ∠BDF=∠BCO=70°
En omdat ∠BCA=80° geldt: ∠FCO=10°. En dan blijft er voor ∠DCA slechts 60° over!
Concl.: ∠CDA=30°

Nu een variant uit de GONIO:

Neem voor het gemak AC=1. (**Dus verderop: BD=1**) Met de cartesische bewijzen weten we dat dit slechts een kwestie is van verkleinen/vergroten….
Dan is **OC= $\cos(10°)$** Onder aanname dat ∠CDA=30° volgt: CD=2·OC
(de verhouding 1:$\sqrt{3}$:2) CD is daarmee middellijn van een cirkel met straal CO en dan ligt punt F op die cirkel (Thales) met (en dat zagen we al:) ∠DFC=90°. En in ΔDFC is sin(10°)= $\frac{FD}{CD}$= $\frac{FD}{2 \cdot OC}$ dus:
FD=2·sin(10°)·**OC** ofwel: FD=2·sin(10°)·**cos(10°)** = sin(20°)

Hierbij is de GONIO-formule: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ gebruikt..
Nu kijken we eens in ΔBFD en zien daar: **sin(20°) = FD**
Kortom: het klopt als een bus!

Maar je ziet ook dat het gebruik van GONIO in een cartesisch bewijs een beetje "rammelt"….

Teteringen februari 2020