Integraalrekening (voor gevorderden)

Niet alle functies hebben een primitieve die uit te drukken is in standaardfuncties.
Soms is het een gepuzzel en een moeizame zoektocht, ondanks alle theorie die je inmiddels kent:
Substitutie en partieel integreren, standaardprimitieven en **<u>trigonometrische substitutie (*)</u>**
Een aantal van die "lastige integralen" heb ik hieronder eens op een rijtje gezet.

Een heel **elementaire** ("lastige") is: $\int \frac{dt}{\cos(t)} = \ln\left|\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right| + c$

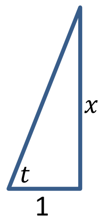
Nog "lastiger" is: $\int \frac{dt}{\cos^3(t)} = \frac{\tan(t)}{2\cos(t)} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right| + c$

Weet jij nog wat "de" primitieve is van $\frac{1}{\cos^2(t)}$?.....

In plaats van $\frac{1}{\cos(t)}$ gebruikt men vaak de functie $\sec(t)$
Met behulp van bovenstaande integralen bepalen we nu :

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ en wel met substitutie: $x = \tan(t)$, waarbij $dx = \frac{1}{\cos^2(t)}dt$

$1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ dus $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)}}} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)}dt = \int \frac{dt}{\cos(t)} = \ln\left|\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right| + c$



Nu terugwerken naar x door een driehoek te beschouwen:
$\tan(t) = \frac{x}{1}$ dus (met Pythagoras:) $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ en dit ingevuld:
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2+1} + x\right| + c$ ... omwille van de duidelijkheid

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$$

(*) De truc hierboven met dat driehoekje noemt men <u>trigonometrische substitutie</u> .

Staat er in de integrand $a^2 - x^2$ probeer dan substitutie met $x = a\sin(t)$ of $x = a\cos(t)$.
Staat er in de integrand $x^2 - a^2$ probeer dan substitutie met $x = a\sec(t)$.
Staat er in de integrand $a^2 + x^2$ probeer dan substitutie met $x = a\tan(t)$.

Schets na afloop zo'n driehoekje en bepaal m.b.v. Pythagoras de schuine zijde om alles weer terug te werken naar de vorm met de oorspronkelijke x.

Krijg je eens ergens $\sin(2t)$ gebruik dan de verdubbelingsformule: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
en als alternatieven: $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ of omgekeerd en evt.: $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

Op een rijtje:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Opgaven:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} =$
2. $\int \frac{3dx}{25+x^2} =$
3. $\int \frac{8dx}{x\sqrt{4x^2-1}} =$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx =$
5. $\int \frac{x}{x^4+36} dx =$
6. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx =$
7. $\int \frac{e^{3x}}{9+e^{6x}} dx =$
8. $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx =$
9. $\int \frac{dx}{x^2-4x+7} =$
10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9+8x^2-x^4}} =$
11. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx =$
12. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx =$
13. $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx =$
14. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} =$
15. $\int \sqrt{x^2-1}\, dx =$
16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} =$
17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} =$
18. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx =$
19. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\, dx =$
20. $\int x\sqrt{1-x^4}\, dx =$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} =$
22. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\, dx =$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}} =$
24. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx =$

Die laatste zag er zo simpel uit, maar is het geenszins!

We gaan nu eens oefenen met integratiegrenzen erbij:

25. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}\, dx =$

26. $\int_1^e \frac{x+1}{x}\, dx =$

27. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx =$

28. $\int_0^3 \frac{x^2-3x}{x+1}\, dx =$

29. $\int_1^2 2^{-x-1}\, dx =$

30. $\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\, dx =$

31. $\int_0^\pi \frac{3\sin(x)}{2-\cos(x)}\, dx =$

32. $\int_{\ln(2)}^{\ln(1+e)} \frac{e^{2x}}{2e^x-2} =$

33. $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\, dx =$

34. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}\, dx =$

35. $\int_2^3 \frac{dx}{16-8x+x^2} =$

36. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{2}\tan(x)\, dx =$

37. $\int_0^1 \frac{4e^x}{1+e^{2x}}\, dx =$

38. $\int_1^e \frac{2+2\ln(x)}{x}\, dx =$

39. $\int_3^5 \frac{|x-4|}{\sqrt{x}}\, dx =$

40. $\int_0^1 x^2 e^{(-x^3)}\, dx =$

41. $\int_2^3 \frac{x^2}{1-x}\, dx =$

42. $\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^x}\, dx =$

43. $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5} =$

44. $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{tan^5(x)}{cos^2(x)}\, dx =$

45. $\int_0^1 \frac{2x}{(x+1)^2}\, dx =$

Tot slot enkele “oneigenlijke integralen” die je netjes met een limiet dient te schrijven:

46. $\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx =$

47. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx =$

48. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+e^{-x}} =$

49. $\int_0^\infty \frac{dx}{2e^x} =$

50. $\int_0^\infty \frac{5}{1+x^2}\,dx =$

51. $\int_1^\infty \frac{5}{3\sqrt{x}}\,dx =$

Integraalrekening (met name bij de goniometrische en cyclometrische functies) krijgt soms weinig aandacht op de middelbare school. . . .

Komt voortgezette integraalrekening dan in HBO en universitaire studies dan weer terug?...JA ! (en niet een beetje ook!)

Voor iedereen die zich hierin wil bekwamen is dit stuk website gereserveerd: probeer en oefen . . . . en spiek gerust bij de antwoorden…..

Valkenisse mei 2018

www.raves.nl