Samenvatting H6; 11; 15 en K van Getal en Ruimte 6VWO wiskunde B

H6 (en H15) <u>Differentiaalrekening</u>:

Zoals "**zoeken naar de exponent** de korte omschrijving is van **logaritme nemen**" is er ook een korte omschrijving voor "**differentiëren**": **zoeken naar de helling van/bij een functie** …
Is dat bij een zekere functie ***y=f(x)*** bij een bepaalde waarde van ***x*** bijvoorbeeld ***x*=2** dan zoeken we de rc van de raaklijn aan de grafiek van ***f*** bij het punt **(2 , *f(2)*)** en noteren ***f'(2)*** = …

De "afgeleide nemen" zegt men ook wel… Bij een punt **(*x,f(x)*)** is de helling(-sfunctie:) ***f'(x)***

REGELS voor het differentiëren:

Machtsfuncties: $f(x) = x^n$ heeft afgeleide: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ voor ieder (vast) getal n.
(andere) notatie: $\frac{d\,x^n}{d\,x} = n \cdot x^{n-1}$ ongeacht de waarde van n

Constante erbij: $f(x) = g(x) + c$ heeft afgeleide: $f'(x) = g'(x) + 0$ (Of kortweg: ***c'*** =0)

Constante maal een functie: $f(x) = c \cdot g(x)$ heeft afg.: $f'(x) = c \cdot g'(x)$

Voorbeeld: $f(x) = x^4 + 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^2}$ $\quad f'(x) = 4x^3 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-3}$
(ga na in de opgave of je dit zo mag laten staan! Soms mag je geen gebroken, of negatieve exponenten gebruiken.. vereenvoudig zo ver dat je de vgl. $f'(x) = 0$ direct kunt oplossen)

Productregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quotiëntregel: $\left(\frac{t}{n}\right)' = \frac{n \cdot t' - t \cdot n'}{n^2}$ ("n at min t an")

Kettingregel $f(g(x))$ heeft afgeleide: $g'(x) \cdot f'(g(x))$ of: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ dus bijvoorbeeld:

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right)' = \frac{1 \cdot \sqrt{2x+1} - (x+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2}{2x+1} = \frac{\sqrt{2x+1} - \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = ..*.. = \frac{2x+1-(x+1)}{(2x+1) \cdot \sqrt{2x+1}} = \frac{x}{(2x+1) \cdot \sqrt{2x+1}}$$

* let op de vermenigvuldiging boven en onder met $\sqrt{2x+1}$ en let op de haakjes!... en bij welke x is de afgeleide nul?

Toepassingen van de afgeleide functie:

Extreme waarden

1. Los op de vgl.: $f'(x) = 0$

2a. Als in de opgave al een schets van de grafiek van $y = f(x)$ staat dan aflezen of het een max of min. betreft.

2b. Is dit niet zo, **maak** dan (mbv. De GRM) een **schets** en lees af….

2c. alternatief: maak een **t**eken**v**erloopschets van $f'(x)$
voorb van zo'n **tv-schets**: $f'(x)$: x+++++0--------0++++++++
x : $-\frac{1}{2}$ **1** **3**

Hier is de raaklijn bij $x = -\frac{1}{2}$ onbekend, bij $x = 1$ is er een max en bij $x = 3$ een minimum

3. Bereken de y-coördinaten en noteer netjes: (bijv.): $max\ f(1) = 4$ etc.

Pas op bij **verticale raaklijnen:** $f(x) = \sqrt{x}$ heeft verticale raaklijn met vgl: $x = 0$ en $min f(0) = 0$
Let ook altijd goed op het "domein"; met dit alles zie je dan het "bereik": $\boldsymbol{B_f}$

Raaklijn **opstellen** in bijvoorbeeld punt A: met $\boldsymbol{x_A = 3}$

1. Eerst uitrekenen $\boldsymbol{y_A = f(3)} = \ldots$
2. Dan $f'(x)$ bepalen en uitrekenen: $f'(3) = \boldsymbol{a}$
3. Vervolgens in de formule: $\boldsymbol{y - y_A = a \cdot (x - x_A)}$ invullen
   (alternatief: van $y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{b}$ bepalen)

opstellen met gegeven rc = **4** (bijvoorbeeld)

1. De vgl $f'(x) = 4$ oplossen... daar komt bijv. uit: $x_B = 2$
2. Nu y-coördinaat uitrekenen $f(2) = y_B$
3. $y - y_B$= 4· $(x - x_B)$ uitschrijven of in $y = \boldsymbol{4}x + \boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{b}$ bepalen)

Kromme door toppen bij functies met nog een "**parameter**" zoals in $\boldsymbol{f_p(x) = x^2 - 6px + 9p^2}$
$f_p'(x) = 2x - 6p = 0$ *als* $p = \frac{1}{3}x$ en als je dit invult in $y = f_p(x)$ krijg je "kromme": $\boldsymbol{y = 0}$

Voor welke p heeft de vgl $f(x) = p$ (een bepaald aantal) oplossingen?... "hoger/lager"...
("splitsen":) $\begin{cases} \boldsymbol{y = f(x)} \\ \boldsymbol{y = p} \end{cases}$ kwestie van kijken naar het aantal snijp'n vd. graf. van $\boldsymbol{f}$ met horizontale lijn (-en)

1. Maak een schets van de graf v. f
2. Bepaal de toppen (als er staat "algebraïsch/exact" of mbv "different'n" met $f'(x) = 0$ exact opl'n)
3. Teken enkele horizontale lijnen en tel de snijpunten; pas op voor hor. asympt.
4. Schrijf "conclusie" $p \leq \cdots$ v $p > \cdots$

Voor welke $\boldsymbol{a}$ heeft de vgl $\boldsymbol{f(x) = ax}$ (een bepaald aantal) oplossingen?... "**waaier**" ...
(óók hier splitsen:) $\begin{cases} y = f(x) \\ y = ax \end{cases}$ kijken naar het aantal snijp'n vd. graf. van f met lijnen door $O(0,0)$

1. Maak een schets van de grafiek van f met wat precisie rond $O(0,0)$
2. Bepaal $f'(0) = \boldsymbol{a_0}$
3. Teken enkele lijnen door $O(0,0)$ met rc groter en kleiner dan $\boldsymbol{a_0}$ (pas op voor asymptoten)
4. Schrijf "conclusie" $a \leq \cdots$ v $a > \cdots$

Voor welke $\boldsymbol{a}$ (soms: $\boldsymbol{p}$) heeft de vgl $\boldsymbol{f(x) = ax + p}$ (een bepaald aantal) oplossingen?...
is een combinatie van bovenstaande... soms moet je werken met het snijpunt met de y-as;
soms geeft men de $\boldsymbol{a}$ wel maar de $\boldsymbol{p}$ niet, of andersom.... Of staat er "geen oplossingen"...
voorbeeld: "Voor welke $\boldsymbol{p}$ heeft de vgl: $\boldsymbol{\frac{2x+1}{x-2} = -1\frac{1}{4}x + p}$ **géén** opl'n?

1. Maak weer een schets van graf. van f en vermeld netjes de asymptoten.
2. Los de vgl.: $f'(x) = -1\frac{1}{4}$ op .... Stel dat daaruit komt: $x = 0$ v $x = 4$
3. Teken de lijnen door $(0, f(0))$ en $(4, f(4))$ met rc= $-1\frac{1}{4}$ ..... $y = -1\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ en $y = -1\frac{1}{4}x + 9\frac{1}{2}$
4. Na aflezen ... "conclusie" $-\frac{1}{2} < p < 9\frac{1}{2}$ **Opm.: als er had gestaan "precies 2 opl'n?"... wat dan?**

Derdegraadsfuncties met een parameter

Het **aantal extreme waarden** hangt **(mede)** af van de discriminant van de afgeleide
voorbeeld: $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + px - 5$ heeft afg.: $f_p{}'(x) = -x^2 + 3x + p$ en de vgl: $f_p{}'(x) = 0$
heeft twee oplossingen als D>0... hier: $9 + 4p > 0$ *dus* $p > -2\frac{1}{4}$
Kijk uit bij situaties met D=0... dan wisselt $f_p{}'(x)$ wellicht niet van teken en is er geen top maar een buigpunt!

Raaklijnproblemen bij functies met een parameter

Voor welke p (en/of q**) raakt de** (gegeven) **lijn k de grafiek van f_p in** een punt A met (gegeven) $x_A = \cdots$

1. Schrijf de rc van k op: $rc_k = \cdots$
2. Los de vgl: $f'(x_A) = rc_k$ op . . . . dit levert een waarde van p op.
3. Combineer $y_A = f(x_A)$ met de vgl van k om een eventuele waarde van q te vinden

Voorbeeld: (geg.) $f_p(x) = x^2\sqrt{x} + p\sqrt{x}$ raakt lijn $k: y = 18x + q$ bij $x_A = 4$

Uitw: $f_p{}'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{p}{2\sqrt{x}}$ en $f_p{}'(4) = 18$ als $20 + \frac{p}{4} = 18 \Leftrightarrow p = -8$ en uiteindelijk **(ga na): $q = -56$**

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A: is de hoek tussen de **raaklijnen** in A

Voorbeeld: (geg.) $f(x) = \sqrt{3x-6}$ en $l: y = -3x + 18$

Ga na dat het snijpunt optreedt bij $x_A = 5$

Ga na dat $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$ en dat $f'(5) = \frac{1}{2}$

Bepaal met tan^{-1} (of "arctangens") de verschilhoek…

Denk er aan dat je de scherpe hoek moet hebben! (vond jij ook 82°?..)

Grafieken van f en g raken elkaar in punt A als $\begin{cases} \boldsymbol{f(x_A) = g(x_A)} \\ \boldsymbol{f'(x_A) = g'(x_A)} \end{cases}$

Ook hier kunnen er extra parameters zoals p (en/of q) optreden…

Als het raakpunt nog niet bekend is; eerst moet worden gemaakt, laat dan de subscripts weg: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

De vgl: $f'(x) = g'(x)$ is vaak het makkelijkst op te lossen; kijk echter uit of die opl'n wel voldoen!

Voorb.: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$ raken. . . . (vond jij ook: (3,5) ?)

Grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in punt A als $\begin{cases} \boldsymbol{f(x_A) = g(x_A)} \\ \boldsymbol{f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1} \end{cases}$

Ook hier kunnen er extra parameters zoals p (en/of q) optreden…

Als het snijpunt nog niet bekend is, laat dan de subscripts weg…

Voorb.: $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$ ("voor welke $\boldsymbol{p\ldots}$loodrecht")

Ga na dat: $\begin{cases} 2\sqrt{x} = \frac{p}{x} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1 \end{cases}$ $\therefore$ $p = 2x\sqrt{x}$ & $p = x^2\sqrt{x}$

Ga na dat $x = 0$ NIET voldoet en uiteindelijk blijkt: $p = 4\sqrt{2}$

Tweede afgeleide en toepassingen

buigpunt en buigraaklijn

1. Maak $f'(x) = \cdots$ en $f''(x) = ..$
2. Los op: $f''(x) = 0$ dit geeft bijvoorbeeld $x_B = ..$
3. Maak een tv-schets van $f''(x)$ om te tonen dat deze bij x_B van teken wisselt,
   tenzij uit (een gegeven) schets van de grafiek of uit de tekst volgt dat 't buigpunt (daar) blijkt
4. Vul voor de y-coördinaat in: $y_B = f(x_B) = ..$ concl.: buigpunt: …
5. Vul voor de $rc_B = f'(x_B) = \boldsymbol{a}$
6. Buigraaklijn wordt dan: $y - y_B = \boldsymbol{a} \cdot (x - x_B)$ of in: $y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ de $\boldsymbol{b}$ bepalen

Voorbeeld: $f(x) = xe^{2x}$ ga na dat de buigraaklijn is: $y = -\frac{1}{e^2}x - \frac{2}{e^2}$ (en? ook tv-schets vergeten?)

Soorten van stijgen en dalen (slordig genoteerd…)

toenemend stijgend $f' > 0$ en $f'' > 0$

afnemend stijgend $f' > 0$ en $f'' < 0$

toenemend dalend $f' < 0$ en $f'' < 0$

afnemend dalend $f' < 0$ en $f'' > 0$

afgelegde weg (afstand); snelheid en versnelling:

Voorb.: $s(t) = -9\frac{2}{3}t^3 + 5\frac{4}{5}t^2$

dan is $v(t) = -29t^2 + 11\frac{3}{5}t$

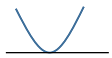
en: $a(t) = -58t + 11\frac{3}{5}$

vierdegraadsfuncties met een parameter

Het aantal buigpunten hangt (mede) af vd. discriminant vd. 2e afgeleide

Voorb.: $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$; heeft géén buigpunten als D ≤ 0 . . . .

in de vgl $f''(x) = 12x^2 + 6px + 1\frac{1}{2} = 0$ is D = $36p^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1\frac{1}{2}$ en

D ≤ 0 ⇔ $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$ let op dat als D=0 de f'' NIET van teken wisselt: 

H11 Integraalrekening:

Hoofdstelling: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ *met* $F'(x) = f(x)$ de zgn **"integraal van a naar b"**

hierbij is $F(x)$ een **primitieve** van $f(x)$ … je mag de constante weglaten omdat-ie bij het verschil toch verdwijnt…

Andere notatie: $F(x) = \int f(x)dx$

Die integraal heeft iets (*) te maken met de oppervlakte van het vlakdeel tussen de grafiek van $y = f(x)$ en de $x-as$.

(*) : ligt het vlakdeel deels boven en deels onder de x-as dan is er een "complicatie"…

Rekenregels voor het primitiveren (als $F(x)$ *een primitieve is van* $f(x)$ *en* $G(x)$ *die van* $g(x)$:)

$c \cdot F(x)$ is een primitieve van: $c \cdot f(x)$

$F(x) + G(x)$ is een primitieve van: $f(x) + g(x)$

$F(x) - G(x)$ „ „ „ $f(x) - g(x)$

Van: $f(x) = x^n$ is een primitieve: $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ mits $n \neq -1$

„ $f(x) = \frac{1}{x}$ „ „ „ $F(x) = ln|x| + c$

„ $f(x) = g^x$ „ „ „ $F(x) = \frac{1}{ln(g)}g^x + c$

„ $f(x) = e^x$ „ „ „ $F(x) = e^x + c$

„ $f(x) = ln(x)$ „ „ „ $F(x) = xln(x) - x + c$

„ $f(x) = {}^g log(x)$ „ „ „ $F(x) = \frac{1}{ln(g)} \cdot (xln(x) - x) + c$

„ $f(x) = sin(x)$ „ „ „ $F(x) = -cos(x) + c$

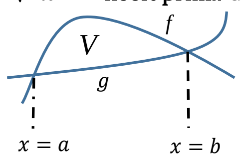
„ $f(x) = cos(x)$ „ „ „ $F(x) = sin(x) + c$

Primitieven van een functie met daarin een lineaire expressie: $ax + b$:

„ $g(x) = f(ax + b)$ „ „ „ $G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$ (denk maar aan de kettingregel)

Voorb.: $g(x) = \sqrt{4x - 1}$ heeft prim.: $G(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4x - 1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}(4x - 1)\sqrt{4x - 1} + c$

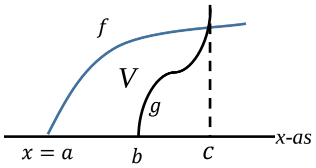
Oppervlakten



vlakdeel V is (geheel) ingesloten door de graf'n van f (bovenste) en g (onderste)

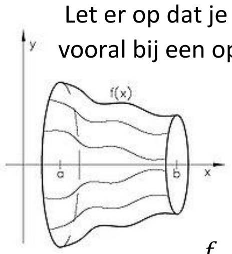
Opp$(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

(ligging t.o.v. x-as doet er niet toe)

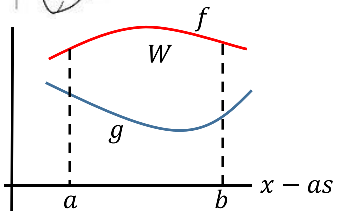


vlakdeel V is (geheel) ingesloten door de graf'n van
f (bovenste) en g (onderste) en de x-as
Opp(V) $= \int_a^c \boldsymbol{f(x)dx} - \int_b^c \boldsymbol{g(x)dx}$

Let er op dat je bij een vlakdeel dat onder de x-as ligt voor de oppervlakte de positieve waarde neemt, vooral bij een optelling van oppervlakten van vlakdelen die resp. onder en boven de x-as liggen.



Als een vlakdeel V, ingesloten door de grafiek van een functie f ; de $x - as$ en de lijnen $x = a$ en $x = b$ wentelt om de x-as ontstaat een **omwentelingslichaam** met **inhoud**: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$ of korter: $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$



De inhoud van het omwentelingslichaam van het gebied W tussen de graf'n van f en g ; $x = a$ en $x = b$ als men wentelt om de x-as is:

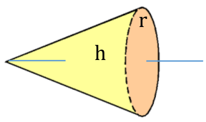
$\boldsymbol{\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx - \pi \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx}$ (of korter)

Integralen benaderen op de GRM:
mbv. Optie Math,9 : *fnInt*

typ eerst: $y_1 = \cdots$ bijvoorbeeld $x^2 - 4$ ..dan: $\int_1^2 (x^2 - 4)dx \approx fnInt(y_1, x, 1{,}2) \approx$ -1,6666667 (..!)
(kan ook rechtstreeks met ipv. y_1 meteen direct: $x^2 - 4$)
Gebruik deze benadermethode bij het controleren van lastige integralen!

Toepassingen van integralen:

Inhoud kegel met straal r en hoogte h: $\boldsymbol{I_{kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

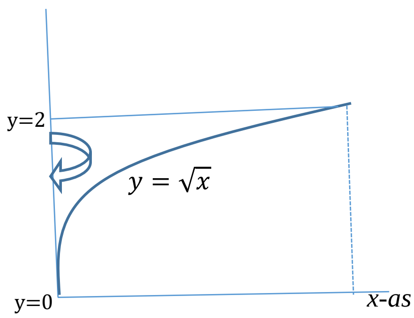


Kan bewezen worden door de lijn $y = \frac{r}{h}x$ te wentelen om de

Inhoud bol: $\boldsymbol{I_{bol} = \frac{4}{3}\pi r^3}$ (wentelen van $x^2 + y^2 = r^2$ om de x-as)

Booglengte: De lengte van een stuk grafiek tussen $x = a$ en $x = b$: $\int_a^b \sqrt{\boldsymbol{1 + (f'(x))^2 dx}}$
gebruik hierbij $y_1 = \cdots$ $y_2 = nDeriv(y_1, x, x)$ en $y_3 = \sqrt{1 + {y_2}^2}$ tot slot: $fnInt(y_3, x, a, b)$

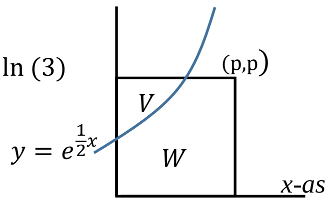
wentelen om de $\boldsymbol{y - as}$:
Inh is: $\int_{y=a}^{y=b} \boldsymbol{\pi \cdot x^2 dy}$



Vaak mag er op 3 decimalen nauwkeurig benaderd worden met de GRM, zoniet: dapper "terugwerken"…
Voorb.: Ber. de inh. van omwentelingslich L als men vlakdeel ingesloten door graf. van $y = \sqrt{x}$; $y - as$ tussen $x = 0$ *en* $x = 4$ wentelt **om de $\boldsymbol{y - as}$**:

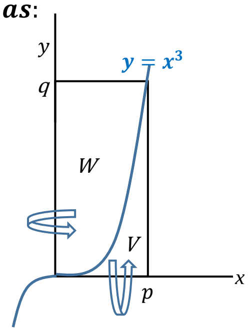
$\int_{y=0}^{y=2} \pi \cdot x^2 dy = \int_0^2 \pi \cdot y^4 dy = \left[\frac{1}{5}\pi y^5\right]_0^2 = 6\frac{2}{5}\pi$
Komt het primitiveren totaal niet mooi uit gebruik dan de benader-methode!

Integralen bij eerstegraads gebroken functies:
uitdelen! **Voorb.:** $\int_0^3 \frac{6x+5}{2x+3} dx = \int_0^3 \left(3 - \frac{4}{2x+3}\right) dx = [3x - 2ln|2x+3|]_0^3 = .. = 9 - 2\ln(3)$
Probeer jij eens: $\boldsymbol{\int_0^3 \frac{6x-1}{3x+1} dx}$ $(= 6 - ln(10)?)$



Verhouding van oppervlakten (afh. van p)
Voorb.: $graf.v.y = e^{\frac{1}{2}x}$ verdeelt een vierkant met zijde p in twee delen V *en* W met $Opp(V) : Opp(W)$= **1:3**
$Opp(V) = \int_0^{2\ln(p)} \left(p - e^{\frac{1}{2}x}\right) dx = \left[px - 2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(p)} = 2p \cdot ln(p) - 2p + 2 = \frac{1}{4}p^2$ geeft met intersect: $p \approx 2{,}47$

Meer vraagstukken met p en q bij wentelen om de x-as en/of om de $y-as$:



Voorb.: punt $P(p,q)$ ligt op $y = x^3$
Lichaam L ontstaat als V om de x-as en M als W om de $y-as$ wentelt.
voor welke p geldt: Inhoud(L)=Inhoud(M)?

$\pi \cdot \int_0^p y^2 dx = \pi \cdot \int_0^q x^2 dy \Leftrightarrow \int_0^p x^6 dx = \int_0^{p^3} y^{\frac{2}{3}} dy \Leftrightarrow \left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^p = \left[\frac{3}{5}q^{\frac{5}{3}}\right]_0^{p^3}$

dus: $\frac{1}{7}p^7 = \frac{3}{5}p^5 \Leftrightarrow p = 0$ v $\frac{1}{7}p^2 = \frac{3}{5}$. Concl.: $p = \pm\frac{1}{5}\sqrt{105}$ (ga na)

Voortgezette integraalrekening HK:

substitutiemethode:

Voorb.: $f(x) = 3x^2 \cdot (x^3-1)^4$ met: $(x^3-1)' = 3x^2$ heeft prim.: $F(x) = b \cdot (x^3-1)^5 + c$
Nog even de b bepalen: (door te differentieren:) $F(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^3-1)^5 + c$
Het is dus een kwestie van herkennen van de afgeleide van een component in het product.

Voorb.: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ eerst herkenbaarder schrijven: $f(x) = x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ met $(x^2+1)' = x$

heeft prim. $F(x) = b \cdot (x^2+1)^{+\frac{1}{2}} + c$ met b =1
Die beginfactor zie je door netjes volgens de **kettingregel** je tussenresultaat weer te differentiëren!

Toepassingen van de substitutiemethode:

Voorb.: $f(x) = tan(x)$ (die hadden we nog niet… **eerst herkenbaarder schrijven:** $f(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = sin(x) \cdot cos^{-1}(x)$

met $(\cos(x))' = -\sin(x)$. Dus prim.: $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

Voorb.: $f(x) = cos(2x) \cdot cos(x)$ eerst herkenbaarder schrijven: mbv $cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$

$f(x) = cos(x) - 2sin^2(x) \cdot cos(x)$ en met: $(sin(x))' = cos(x)$

$F(x) = \sin(x) - \frac{2}{3}sin^3(x) + c$

Partieel integreren:

komt eigenlijk neer op slim gebruik van de **productregel**: $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$
Dit is leesbaarder als je links en rechts (alles) deelt door dx …. dan staat er $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Wen (vlot) aan die notatie want het is de basis van "differentiaalvergelijkingen"
Slordig genoteerd ziet het er als volgt uit: $\int f' \cdot g\, dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\, dx$
Herken je van een van de factoren een primitieve **dan** gebruik je deze regel! **Voor de** gevorderden zie je:

$$\boxed{\int g\, df = f \cdot g - \int f\, dg}$$

Voorb.: $h(x) = x \cdot e^{2x}$ voor de beginners: laat die x als g staan en gebruik dat $e^{2x} = (\frac{1}{2}e^{2x})'$ …**de f'**

dan is $H(x) = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x' dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \cdot 1 dx$
$= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

Voorb.: $h(x) = ln(x) = 1 \cdot ln(x)$ voor de gevorderden:

$$H(x) = \int 1 \cdot ln(x) dx = \int ln(x)\, dx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot d\, ln(x)$$

(overbodig)

$$= x \cdot ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \cdot ln(x) - \int 1\, dx$$
$$= x \cdot ln(x) - x + c$$

deze standaard-primitieve hadden we al; er komen er aldus echter wel heel veel bij!…

Wat je moet oefenen is het "**voor- en achter de d brengen**" . . . . het geeft zelfvertrouwen en een speels gemak waarmee je door integraalrekening (en later differentiaalvergelijkingen….) gaat (het gaat overigens niet sneller!)

Heb je dat zelfvertrouwen niet (of begin je hier te laat aan) ga dan gerust op jouw eigen manier verder!

Herhaald partieel integreren

Voorb.: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \cos(x)$ voor de beginners: . . .

$F(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot \sin(x) - \int \frac{1}{2}x \cdot \sin(x)dx$ **(Kijk goed uit wat nu precies de f 'en g' etc. zijn !)**

$= \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \left(\frac{1}{2}x \cdot -\cos(x) - \int \frac{1}{2} \cdot -\cos(x)dx\right)$ tweede keer....

$= \frac{1}{4}x^2 \sin(x) + \frac{1}{2}x \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + c$

Voor de gevorderden: $\int f(x)\, dx = \int \frac{1}{4}x^2 \cdot \cos(x)\, dx = \int \frac{1}{4}x^2 d\,(\sin(x)) = \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \int \sin(x) d\left(\frac{1}{4}x^2\right) =$

$\frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \frac{1}{2}x\, d\, x =$

$= \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \int \frac{1}{2}x\, d\,(-\cos(x)) = \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \left[\frac{1}{2}x \cdot -\cos(x) - \int -\cos(x)\, d\frac{1}{2}x\right]$

$= \frac{1}{4}x^2 \sin(x) - \frac{1}{2}x \cdot -\cos(x) - \int \frac{1}{2}\cos(x)\, dx$ kijk goed uit met al die "minnen"...

$= \frac{1}{4}x^2 \sin(x) + \frac{1}{2}x \cdot \cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + c$

Recurrente betrekkingen (bij integralen):

Soms kom je na (herhaald) partieel integreren in een uitdrukking aan de rechterkant met een minteken ervoor **het gevraagde weer tegen..... Voorb.:** $F(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - F(x)$

dan blijkt dus: $2 \cdot F(x) = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$ .. en het gevraagde dus: $F(x) = \frac{1}{2} e^x \sin(x) - \frac{1}{2} e^x \cos(x) + c$

Bij twee keer partieel integreren komt er na een $\cos(x)$ eerst een $\sin(x)$ en daarna een $-\cos(x)$ . . . .

Voorb.: $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(x)$

$F(x) = \int f(x)dx = e^{-x} \cdot \sin(x) - \int -e^{-x} \cdot \sin(x)dx$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) + \int e^{-x} \cdot \sin(x)dx$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot -\cos(x) - \int -e^{-x} \cdot -\cos(x)dx$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) - e^{-x} \cdot \cos(x) - \int e^{-x} \cdot \cos(x)dx$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) - e^{-x} \cdot \cos(x) - \int f(x)dx$

dus: $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{-x} \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + c$

Voor de gevorderden: $\int e^{-x} \cdot \cos(x)dx = \int e^{-x}\, d\, \sin(x) = e^{-x} \cdot \sin(x) - \int \sin(x) d(e^{-x})$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) + \int e^{-x} \cdot \sin(x)dx = e^{-x} \cdot \sin(x) + \int e^{-x} \cdot d(-\cos(x))$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) + e^{-x} \cdot -\cos(x) - \int -\cos(x) d(e^{-x})$

$= e^{-x} \cdot \sin(x) - e^{-x} \cdot \cos(x) - \int e^{-x} \cdot \cos(x)dx = e^{-x} \cdot \sin(x) - e^{-x} \cdot \cos(x) - \int f(x)dx$

dus: $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}e^{-x} \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + c$

Als je goed kijkt en vergelijkt, dan zie je dat het verschil tussen "beginners en gevorderden" uitsluitend het gemak is waarmee de gevorderden expressies vóór en achter de d brengen!

Breuken uitdelen (zie ook hierboven: integralen bij eerstegraads gebroken functies)

Voorb.: $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x+1} = \cdots = 2x + 3 - \frac{2}{x+1}$

$$x+1 \,/\, 2x^2 + 5x + 1 \,\backslash\, 2x + 3$$
$$\underline{2x^2 + 2x} \; -$$
$$3x + 1$$
$$\underline{3x + 3} \; -$$
$$-2 \text{ ("rest")}$$

staartdeling!...

dus $F(x) = x^2 + 3x - 2\ln|x+1| + c$

$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

Breuken splitsen:

Voorb.: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+B)}{x^2+4x+3}$ $met \begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=-1 \end{cases}$

dus $-2A = 3 \therefore A = -1\frac{1}{2}$ $en\ B = 3\frac{1}{2}$

herkenbaarder geschreven: $f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{3\frac{1}{2}}{x+3}$ dus $F(x) = -1\frac{1}{2} ln|x+1| + 3\frac{1}{2} ln|x+3| + c$

Combinatie van uitdelen en splitsen:

Voorb.: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x-3} = \ \ldots$

$$x^2 + 2x - 3 \,/\, x^3 \,\backslash\, x - 2$$
$$\underline{x^3 + 2x^2 - 3x} \; -$$
$$-2x^2 + 3x$$
$$\underline{-2x^2 - 4x + 6} \; -$$
$$7x - 6 \text{ "rest"}$$

Nu nog die $\frac{7x-6}{x^2+2x-3}$ **splitsen:** (met: $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$)

$\frac{7x-6}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A+3B}{(x+3)(x-1)}$ dus $\begin{cases} A + B = 7 \\ -A + 3B = -6 \end{cases}$ $+$

$\therefore 4B = 1\ en\ B = \frac{1}{4}\ \ en\ \ A = 6\frac{3}{4}$ en herkenbaarder: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x-3} = x - 2 + \frac{6\frac{3}{4}}{x+3} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

Concl.: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6\frac{3}{4} ln|x+3| + \frac{1}{4} ln|x-1| + c$

Cyclometrische functies: (speciaal voor de gevorderden!)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad F(x) = arctan(x) + c$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad G(x) = arcsin(x) + c$$
$$h(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad H(x) = arccos(x) + c$$

En een "lastige" is: $l(x) = arctan(x)$: $L(x) = x \cdot arctan(x) - \frac{1}{2} ln(x^2+1) + c$

Deze is echter zelf eenvoudig te maken met: $l(x) = 1 \cdot arctan(x)$ **die 1 achter de d brengen....**

Voorb.: $f(x) = \frac{3}{x^2+3} = \cdots = \frac{1}{\frac{1}{3}x^2+1} = \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$ $dus\ \ F(x) = \sqrt{3} \cdot arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

Voorb.: $g(x) = \frac{x}{x^4+1} = \cdots = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{(x^2)^2+1}$ $dus\ \ G(x) = \frac{1}{2} arctan(x^2) + c$

Voorb.: $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}$ dus $H(x) = \frac{1}{3} arcsin(3x) + c$

Voorb.: $f(x) = \frac{5}{x^2-6x+18} = \frac{5}{(x-3)^2+9} = \frac{\frac{5}{9}}{(\frac{x-3}{3})^2+1}$ $dus\ F(x) = \frac{5}{3} \cdot arctan\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + c$

Oefen op diverse series "lastige integralen" … voor de gevorderden staan er nogal veel op: **www.raves.nl**