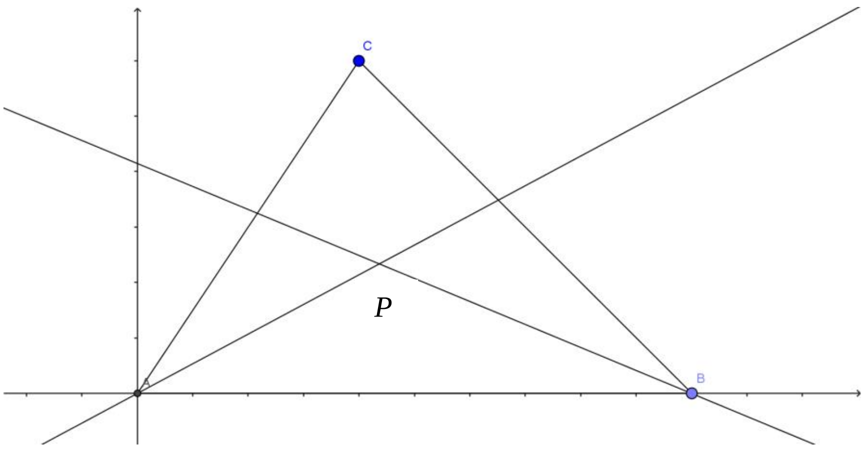
LUIDT:

In een willekeurige driehoek (ABC) snijden de bissectrices (“deelijnen”) van de hoeken elkaar precies in één punt.

IDEE VAN HET (CARTESISCH) BEWIJS:

We kiezen het assenstelsel met een hoekpunt A in de oorsprong (0,0) en B op de x-as met coördinaten (1,0). Het derde hoekpunt C heeft dan nog onbekende coördinaten: $C(a, b)$

Verder gebruiken we de **afstandformule**:
Als een lijn gegeven is door de (algemene) vergelijking $ax + by + c = 0$ dan is de afstand van een punt $P(x_P, y_P)$ tot die lijn de uitkomst van : $\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



De vergelijkingen van AB; BC en AC zijn: $y = 0$, $y = \frac{b}{a-1}(x-1)$ en $y = \frac{b}{a}x$ en in de algemene gedaante geschreven: AB: $y = 0$; BC: $bx + (1-a)y - b = 0$; AC: $bx - ay = 0$

Voor punten (x, y)op de deellijn van $\angle B$ geldt: $|y| = \frac{|bx+(1-a)y-b|}{\sqrt{b^2+(a-1)^2}}$ (zelfde afstanden)
Uiteraard zijn er twee keuzen: de “binnen-deellijn” en de “buiten-deellijn”, kwestie van “plus of min”…. We gaan later eens kijken WELKE we hier nu precies hadden*…..

Die met de “plus” wordt: $\sqrt{b^2+(a-1)^2} \cdot y = bx + (1-a)y - b$ **(vgl. Ia)**

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{b^2+(a-1)^2} + (a-1)\right) \cdot y = bx - b$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{b^2+(a-1)^2} + (a-1)\right) \cdot y + b = \boldsymbol{bx}$

Voor de deellijn van $\angle A$ geldt: $y = \pm\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en ook hier nemen we de “plus-variant” (**):
$\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\cdot y = \boldsymbol{bx}$ gelijkstellen levert:

$$y\cdot\sqrt{a^2+b^2}+\boldsymbol{ay} = y\cdot\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\boldsymbol{ay}-y+b$$

en we vinden de y -coördinaat van P: $y_P = \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1}$

Daarmee is ook x_P bekend: $x_P = \frac{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}+\boldsymbol{a}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1}$

Vervolgens de deellijn van $\angle C$ maken…

Te combineren: AC: $bx-ay=0$ en BC: $bx+(1-a)y-b=0$

$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{|bx+(1-a)y-b|}{\sqrt{b^2+(a-1)^2}}$ en na kruiselings vermenigvuldigen (met de “+variant”): **(vgl. IIa)**

$$b\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot x - a\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot y = b\sqrt{a^2+b^2}\cdot x + (1-a)\sqrt{a^2+b^2}\cdot y - b\sqrt{a^2+b^2}$$

En hier zou $P(x_P, y_P)$op moeten liggen……invullen maar:

$$(b\sqrt{b^2+(a-1)^2} - b\sqrt{a^2+b^2})\cdot x_P = ((1-a)\sqrt{a^2+b^2} + a\sqrt{b^2+(a-1)^2})\cdot y_P - b\sqrt{a^2+b^2}$$

$$b(\sqrt{b^2+(a-1)^2} - \sqrt{a^2+b^2})\cdot x_P = ((1-a)\sqrt{a^2+b^2} + a\sqrt{b^2+(a-1)^2})\cdot y_P - b\sqrt{a^2+b^2}$$

En omdat $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1$in de noemers van zowel x_P als y_P zit vermenigvuldigen we de vergelijking (boven) daarmee en krijgen met invullen van x_P & y_P:

$$b(\sqrt{b^2+(a-1)^2} - \sqrt{a^2+b^2})\cdot(\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}+\boldsymbol{a}) =$$

$$\boldsymbol{b}(1-a)\sqrt{a^2+b^2} + a\boldsymbol{b}\sqrt{b^2+(a-1)^2}) - b\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1)$$

En nu komt het spannendste deel. . . . .het wegwerken van de haakjes!

$$b(\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2} + \boldsymbol{ab}(\sqrt{b^2+(a-1)^2} - b\cdot(\boldsymbol{a^2+b^2}) - \boldsymbol{ab}\cdot\sqrt{a^2+b^2} =$$

$$\boldsymbol{b\sqrt{a^2+b^2}} - \boldsymbol{ab}\cdot\sqrt{a^2+b^2} + \boldsymbol{ab}(\sqrt{b^2+(a-1)^2} - b\cdot(\boldsymbol{a^2+b^2}) + b(\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$
$$- \boldsymbol{b\sqrt{a^2+b^2}}$$

Helaas past het rechterlid net niet op één regel! Maar het is gelukt! Alles (nou ja…)klopt als een bus.

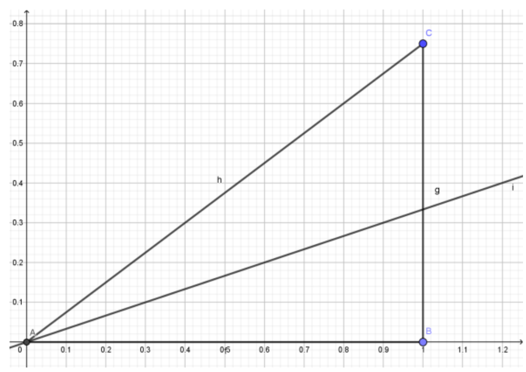
(*) Het enige punt van kritiek is dat we hier niet goed geverifieerd hebben of we nu per ongeluk twee buitendeellijnen hebben genomen (en “gesneden met een echte binnendeellijn”…) of drie “echte” binnendeellijnen. (**) **Wij hebben lukraak twee situaties met de plusvariant gebruikt** !!

Laten we eens kijken naar de straal van de vermeende ingeschreven cirkel:

$$y_P = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1}$$

De noemer komt vanwege dat minteken zo klein voor!.... Je zou daar een plus hebben verwacht! Laten we eens een controle-voorbeeld beschouwen!

De situatie met $\boldsymbol{a=1}$ $\boldsymbol{en}$ $\boldsymbol{b=\frac{3}{4}}$:



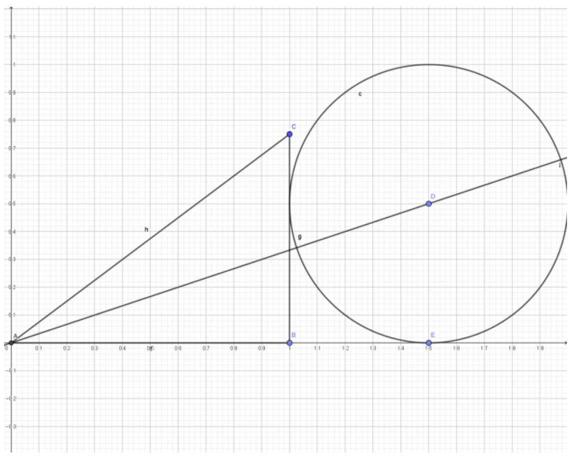
Getekend is de bissectrice van ∠A en die heeft een positieve richtingscoëfficiënt (onder een bepaalde aanname ….) zoals ook overeenkomt in het verhaal hierboven (**) . . . .

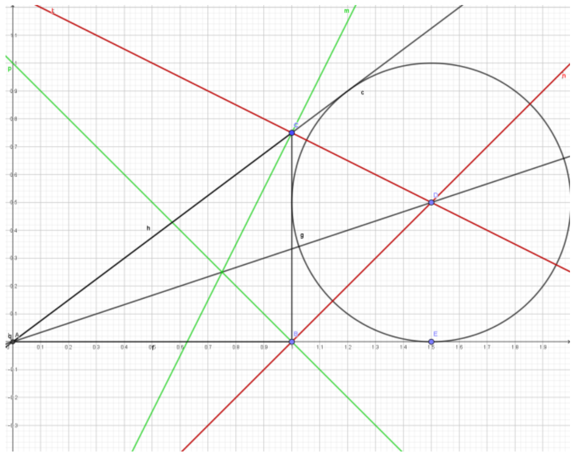
Maar de coördinaten van ons punt P zouden dan zijn resp.:

$$x_P = \frac{\sqrt{\mathbf{1^2 + (\frac{3}{4})^2} + 1}}{\sqrt{1^2 + (\frac{3}{4})^2} - \sqrt{(1-1)^2 + (\frac{3}{4})^2} + 1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{3}{4} + 1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}} = 1\frac{1}{2}$$

en $y_P = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{(a-1)^2+b^2} + 1} = \ldots = \frac{1}{2}$

Als je goed kijkt naar het driehoekje hierboven dan zie je dat dit punt BUITEN de driehoek ligt!!! Hieronder nadere beschouwingen:





En het vermeende middelpunt (zie linker figuur)
levert een cirkel die NIET inwendig raakt!

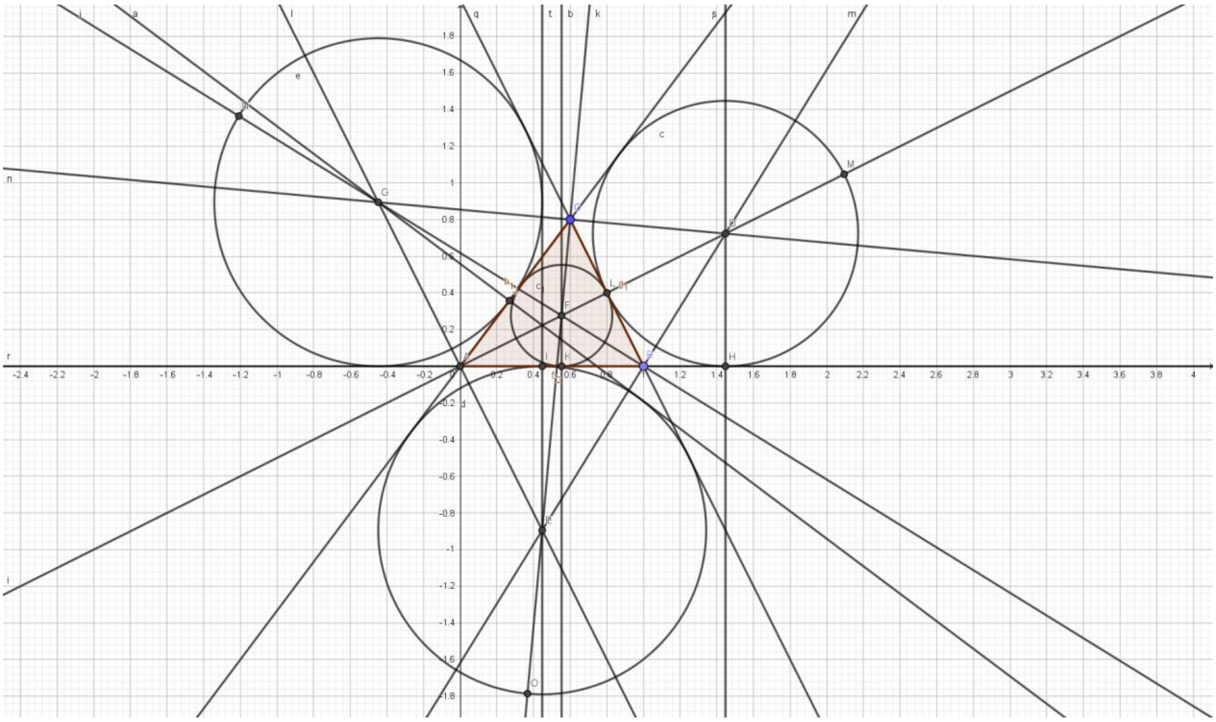
Kennelijk hebben we per ongeluk twee “buitendeellijnen” (van hoeken B en C) genomen!!
In de rechterfiguur zijn dat de rode lijnen…. En we hadden de groene lijnen moeten hebben!
De cirkel raakt de zijden van de driehoek wel, maar (“in het verlengde”) aan de buitenkant!

De straal had ook niet $\frac{1}{2}$ moeten zijn, maar precies de helft; net als de coördinaten van P.

(Uiteraard geen toeval!….)

Hoe zit het dan wel precies, vraag je je af. . . . . .?

De volgende figuur legt alles “duidelijk” uit:
Je ziet een ingeschreven cirkel en aan de buitenkant drie cirkels die wel raken (maar aan de verlengden van de zijden!)



Nu gaan we nog eens precies kijken naar de BINNENdeelijnen van hoeken B en C !

De ("juiste") deellijn van hoek B:

De variant met de MIN wordt: $\sqrt{(a-1)^2+b^2}\cdot y = -bx+(a-1)y+b$ **(vgl. Ib)**

Dat dit de goede vergelijking is volgt uit: $y = \frac{b}{a-1-\sqrt{(a-1)^2+b^2}}\cdot x - \frac{b}{a-1-\sqrt{(a-1)^2+b^2}}$

Ga gerust na door enkele (positieve) getallenvoorbeelden in te vullen dat dit de juiste is!

Maak je echter uit **Ib** de term bx vrij dan krijg je

$bx = (a-1)y - \sqrt{(a-1)^2+b^2}\cdot y + b$

Opmerking: Aan het eind van de bepaling van de coördinaten van P gaan we dan die invullen in de juiste deellijn van $\angle C$ (de "min-variant"): **(vgl. IIb)**

Nu eerst die $\boldsymbol{bx}$ combineren met $\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\cdot y = \boldsymbol{bx}$ van de deellijn van $\angle A$

(Ga na dat met positieve waarden voor a en b dit een positieve richtingscoëfficiënt oplevert!)

Op de volgende pagina zie je dat je dan krijgt: ("elimineren van de $\boldsymbol{x}$ **")** . . . .

$(a-1)y - \sqrt{(a-1)^2+b^2}\cdot y + \boldsymbol{b} = \left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\cdot y$

$$\boldsymbol{b} = \left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\cdot y + \sqrt{(a-1)^2+b^2}\cdot y + (1-a)y$$

$$\boldsymbol{b} = \left(\sqrt{a^2+b^2} + \boldsymbol{a} + \sqrt{(a-1)^2+b^2} + 1 - \boldsymbol{a}\right)\cdot y$$

En omdat er weer wat wegvalt houden we over: $y_P = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+1}$, maar ter voorkoming van misverstanden (leesfouten) schrijven we liever: $\boldsymbol{y_P = \frac{b}{1+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}}}$

Dit is tevens de straal van de (ECHTE) ingeschreven cirkel !
Je ziet dat deze waarde veel kleiner is (onder de aanname dat a en b positieve getallen waren) …

De bijbehorende x -coördinaat is dan: $\boldsymbol{x_P = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{1+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}}}$
Hierbij hebben we het zo netjes mogelijk (om leesfouten te vermijden) geschreven . . . .

Als laatste klus rest ons nu nog aan te tonen dat invullen in **(vgl. IIb):** (alles doet "kloppen")
$b\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot \boldsymbol{x} - a\sqrt{b^2+(a-1)^2}\cdot \boldsymbol{y} = -b\sqrt{a^2+b^2}\cdot \boldsymbol{x} - (1-a)\sqrt{a^2+b^2}\cdot \boldsymbol{y} + b\sqrt{a^2+b^2}$
Dit past echter (weer) niet op één regel . . . .

En het is eigenlijk het spannendste deel van al dit werk. . . . ik laat de lezer graag het plezier over van het vermenigvuldigen met die (ene) geschikte term en daarna het wegwerken van de haakjes……
Wel geef ik hierbij een link naar een interactieve Geogebra-tekening: [Binnen-en-buitendeellijnen] .

Aan de leerlingen van mijn eigen 5VWO wiskunde B lesgroep (-en) . . De Opdracht:
Schrijf de rest van het bewijs helemaal (netjes) uit en bepaal ook de coördinaten (netjes uitgedrukt in a en b) van de andere middelpunten ("buiten-links" en "buiten-onder") . . . .lever je verslag in en het telt mee als een 10 die één keer (als "schriftelijke overhoring" …meetelt voor de bepaling van je rapportpunt!

Valkenisse,
september 2017