LUIDT:

Als een lijn gegeven is door de (algemene) vergelijking $ax + by + c = 0$ dan is de afstand van een punt $P(x_P, y_P)$ tot die lijn de uitkomst van: $\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

IDEE VAN HET BEWIJS:

We kiezen het assenstelsel nu eens NIET met gemak, bijvoorbeeld met juist punt P in de oorsprong; ook niet onze lijn door de oorsprong (gevolg: c=0…) en ook niet horizontaal of verticaal….

Het bewijs gaat dan overigens veel vlotter !! (hoogstens een “half kantje” schrijfwerk…) Nieuwsgierigheid maakte zich echter van mij meester, toen ik me afvroeg: kun je een Cartesisch bewijs zelfs leveren als alle variabelen zich “wild” mogen gedragen? Als er bij aanvang niks “zomaar” wegvalt?

Welnu…. we starten met een hulploodlijn loodrecht op de gegeven lijn, door punt P……en bepalen het snijpunt van die twee lijnen: punt S. Vervolgens bepalen we met behulp van Pythagoras de afstand van P tot S en laten zien dat die expressie gelijk is aan $\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Voorwaar…..een hele klus!
Je vraagt je af: waarom eigenlijk? Het antwoord is dat met behulp van deze formule je weer verder kunt bouwen aan allerlei cartesische bewijzen/stellingen.

De loodlijn door P heeft vergelijking: $bx - ay = bx_P - ay_P$

En op voorwaarde dat $b \neq 0$ geldt dan $\boldsymbol{x} = \frac{a}{b}y + x_P - \frac{a}{b}y_P$ en dit vullen we in de vergelijking:
$a\boldsymbol{x} + by + c = 0$ in . . . . en krijgen dan: $\frac{a^2}{b}\boldsymbol{y} + ax_P - \frac{a^2}{b}y_P + b\boldsymbol{y} + c = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{a^2+b^2}{b}y = \frac{a^2}{b}y_P - ax_P - c \;\Leftrightarrow\; y_S = \frac{a^2}{a^2+b^2}y_P - \frac{ab}{a^2+b^2}x_P - \frac{bc}{a^2+b^2}$ en dit weer terug invullen in
$\boldsymbol{x} = \frac{a}{b}y + x_P - \frac{a}{b}y_P$ om x_S te bepalen: $x_S = \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \boldsymbol{y_P} - \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \boldsymbol{x_P} - \frac{ac}{a^2+b^2} + \boldsymbol{x_P} - \frac{a}{b}\boldsymbol{y_P}$

$\Leftrightarrow x_S = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - 1\right) \cdot \boldsymbol{y_P} + \left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) \cdot \boldsymbol{x_P} - \frac{ac}{a^2+b^2}$ …. Truukje: $1 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$ en we krijgen:
$x_S = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{-b^2}{a^2+b^2}\right) \cdot \boldsymbol{y_P} + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \cdot \boldsymbol{x_P} - \frac{ac}{a^2+b^2}$ en “vereenvoudigd”:

$x_S = \left(\frac{-ab}{a^2+b^2}\right) \cdot \boldsymbol{y_P} + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \cdot \boldsymbol{x_P} - \frac{ac}{a^2+b^2}$ hierbij hebben we wat haakjes laten staan, die eigenlijk weg mochten…. Nu de expressie $(\boldsymbol{x_P} - \boldsymbol{x_S})^2 + (\boldsymbol{y_P} - \boldsymbol{y_S})^2$ uitschrijven…..
Hierbij gebruiken we dat $x_P - \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \cdot x_P = \left(1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \cdot x_P = \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot x_P$

En daarmee wordt: $(\boldsymbol{x_P} - \boldsymbol{x_S})^2 + (\boldsymbol{y_P} - \boldsymbol{y_S})^2 =$

$$\left(\frac{ab}{a^2+b^2} \cdot y_P + \frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot x_P + \frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot y_P + \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot x_P + \frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2 \quad \text{(I)}$$

alle breuken zijn gelijknamig met in de noemer het kwadraat van $a^2 + b^2$

brengen we die onder één noemer (die van het kwadraat van $a^2 + b^2$) dan wordt de teller:
met weglating van al die subscriptjes, dus met x in plaats van x_P en y in plaats van y_P :
$a^2b^2y^2 + a^4x^2 + a^2c^2 + 2a^3bxy + 2a^2bcy + 2a^3cx + b^4y^2 + a^2b^2x^2 + b^2c^2 + 2ab^3xy + 2b^3cy + 2ab^2cx$. (II)

In de afstandformule: $\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ laten we ook de indices weg en kwadrateren tot:

$$\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy+2acx+2bcy}{a^2+b^2} =$$

teller en noemer vermenigvuldigen van deze laatste breuk levert dezelfde noemer als (I).
De teller wordt dan:

$$(a^2+b^2)\cdot(\,a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy+2acx+2bcy) =$$
$$\boldsymbol{a^2b^2y^2} + \boldsymbol{a^4x^2} + a^2c^2 + 2a^3bxy + 2a^2bcy + 2a^3cx + b^4y^2 + a^2b^2x^2 + b^2c^2 + 2ab^3xy + 2b^3cy + 2ab^2cx$$

Hierbij zijn niet alleen de eerste termen (rood en blauw) verwisseld, maar alle termen op volgorde gezet om te vergelijken met (II)

En het resultaat is verbluffend: een "perfect match"!

Oh ja, ... de "mitsen en maren": Hoe pakt het uit als in het begin WEL gold: b=0?
Welnu, dan hebben we een verticale lijn van de vorm $x - c = 0$ en de (horizontale) afstand van $P(a, b)$ tot die lijn is $|a - c|$ ... geheel in overeenstemming met de formule (een triviaal geval).

Dankzij de afstandformule kunnen we weer verder "bouwen" en bijvoorbeeld de Stelling over deellijnen in een driehoek bewijzen

Oktober 2017
Hotel Sands Beach Resort
Costa Teguise, Lanzarote