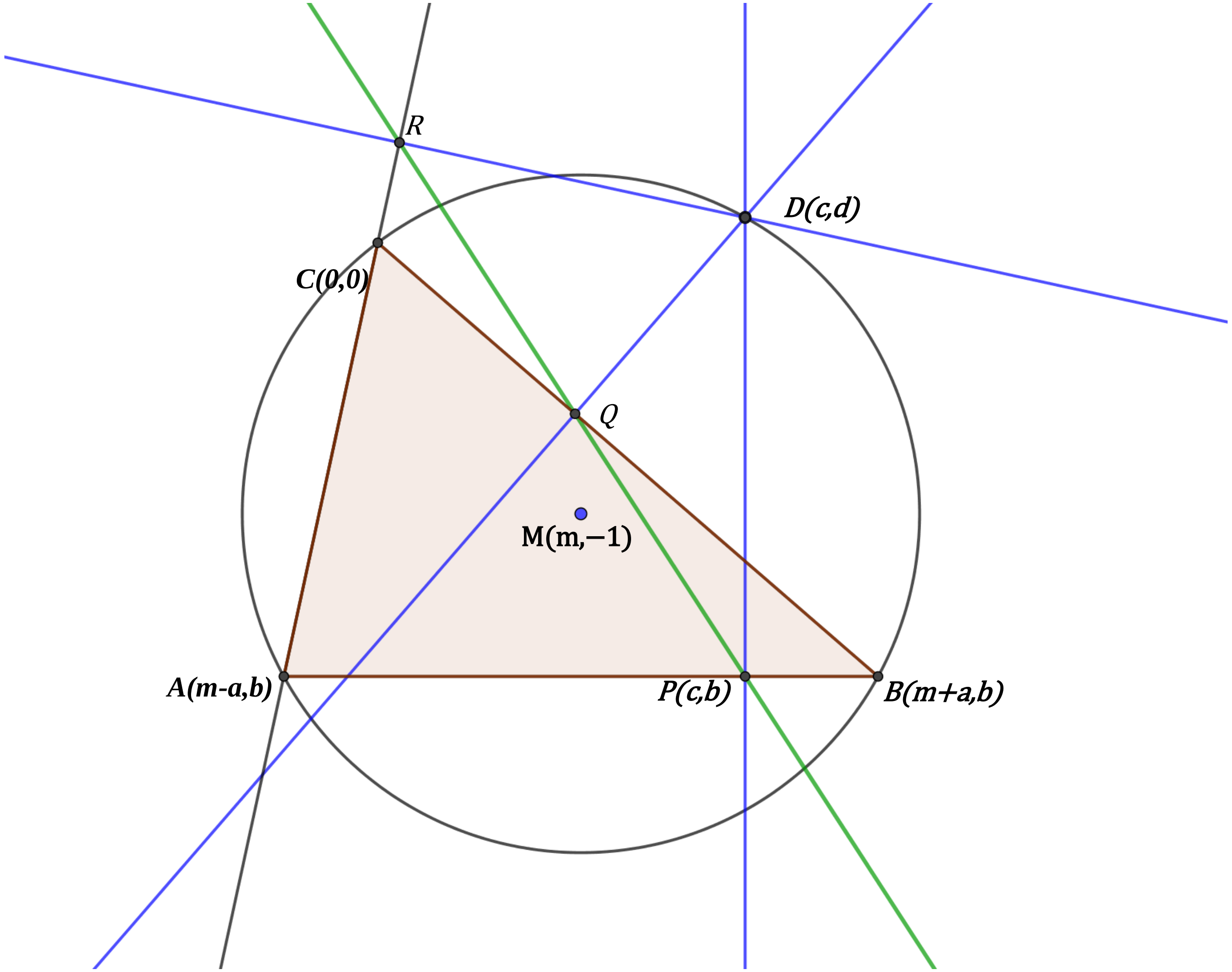
LUIDT: **Als de hoekpunten van een driehoek ABC op een cirkel liggen dan zullen de projecties van een willekeurig vierde punt (op dezelfde cirkel) op de drie zijden van driehoek ABC precies op één lijn liggen.** **Klik hier voor een interactieve** **Geogebra-tekening**



Opmerking vooraf: er komen verderop enkele (zeer lange) regels vol algebra die afdrukstand "liggend" vergen!

Idee van het (cartesisch!) bewijs:

We kiezen er voor lijnstuk $\boldsymbol{AB}$ horizontaal te nemen, echter NIET punt $\boldsymbol{A}$ maar punt $\boldsymbol{C}$ als de oorsprong $(0,0)$ en voor het middelpunt van de cirkel $\boldsymbol{M}(m,-1)$.
Door vergroting/verkleining kan de y-coördinaat van M zo gekozen worden.
Omwille van de duidelijkheid in de tekening nemen we die y-coördinaat niet $+1$, maar -1...
$\boldsymbol{C}$ is immers het "hoogste punt".
ALS lijnstuk $\boldsymbol{AB}$ horizontaal is dan ligt $\boldsymbol{M}$ even ver van $\boldsymbol{A}$ als van $\boldsymbol{B}$ ....
Dus kiezen we voor hun coördinaten: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{m-a}, \boldsymbol{b})$ en $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{m+a}, \boldsymbol{b})$.
Merk op dat de y-coördinaat $\boldsymbol{b}$ helaas onbekend is, maar dat de x-coördinaten slechts één enkele extra variabele vergen!

Er geldt nu in ieder geval (cirkeleigenschap/Pythagoras:) $\quad a^2+(b+1)^2=m^2+1$
of (uitgewerkt) $a^2+b^2=m^2-2b \Leftrightarrow m^2-a^2=b^2+2b$ $\quad(\boldsymbol{I})$
Het vierde punt op de cirkel: $D(c,d)$ vergt helaas variabelen nummers 3 en 4.....
En (weer wegens de cirkelvgl./Pythagoras): $m^2+1=(m-c)^2+(d+1)^2$
of (uitgewerkt) $c^2+d^2=2cm-2d$ $\quad(\boldsymbol{II})$

De projectie van $D(c,d)$ op zijde AB is $P(c,b)$ De projectie op zijde BC noemen we Q en die op AC: R
We stellen de vergelijking op van QR en onderzoeken of P daar op ligt.....

Bewijs:

lijn BC heeft vergelijking (vgl.) $y=\frac{b}{a+m}\cdot x$ $\quad(1)$
DQ heeft dus vgl.: $y=\frac{a+m}{-b}\cdot(x-c)+d$ $\quad(2)$

lijn AC heeft vergelijking (vgl.) $y=\frac{b}{m-a}\cdot x$ $\quad(3)$
DR heeft dus vgl.: $y=\frac{a-m}{b}\cdot(x-c)+d$ $\quad(4)$

(1) en (2) gelijkstellen geeft: $\frac{b}{a+m}\cdot x = \frac{a+m}{-b}\cdot(x-c)+d \quad\Leftrightarrow\quad \frac{b}{a+m}\cdot x = \frac{a+m}{-b}\cdot x + \frac{(a+m)c}{b}+\frac{bd}{b} \quad\Leftrightarrow$

$\frac{b}{a+m}\cdot x + \frac{a+m}{b}\cdot x = \frac{(a+m)c}{b}+\frac{bd}{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{b^2+(a+m)^2}{(a+m)b}\cdot x = \frac{(a+m)c+bd}{b}$ en hieruit volgt $x_Q = \frac{(a+m)c+bd}{\cancel{b}}\cdot\frac{(a+m)\cancel{b}}{b^2+(a+m)^2}$

of vereenvoudigd: $x_Q = \frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m)$ . . . . en dit teruginvullen in (1) geeft: $y_Q = \frac{\boldsymbol{b}\cdot((a+m)c+bd)}{b^2+(a+m)^2}$ . . . . (“overal plusjes” . . . .)

(3) en (4) gelijkstellen geeft: $\frac{b}{m-a}\cdot x = \frac{a-m}{b}\cdot(x-c)+d \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{m-a}\cdot x = \frac{a-m}{b}\cdot x + \frac{(m-a)\cdot c}{b}+d \;\Leftrightarrow$

$\frac{b}{m-a}\cdot x + \frac{m-a}{b}\cdot x = \frac{(m-a)\cdot c}{b}+\frac{bd}{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{b^2+(m-a)^2}{(m-a)b}\cdot x = \frac{(m-a)c+bd}{b}$ en hieruit volgt $x_R = \frac{(m-a)c+bd}{\cancel{b}}\cdot\frac{(m-a)\cancel{b}}{b^2+(m-a)^2}$

of vereenvoudigd: $x_R = \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)$ . . . . en dit teruginvullen in (3) geeft: $y_R = \frac{\boldsymbol{b}\cdot((m-a)c+bd)}{b^2+(m-a)^2}$

. . . . . ook hier geldt de kunst van het NIET te ver vereenvoudigen!

Nu gaan we de vgl. van QR opstellen met de (bekende) formule: $y - y_Q = \frac{y_Q-y_R}{x_Q-x_R}\cdot(x-x_Q)$

$$y - \frac{a\boldsymbol{b}c+\boldsymbol{b}cm+\boldsymbol{b}^2d}{b^2+(a+m)^2} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot((a+m)c+bd)}{b^2+(a+m)^2} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot((m-a)c+bd)}{b^2+(m-a)^2}}{\dfrac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \dfrac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)}\cdot(x-x_Q)$$

En we gaan onderzoeken of punt $P(c,\boldsymbol{b})$ hier “op ligt”….invullen dus…:

$$\boldsymbol{b} - \frac{a\boldsymbol{b}c+\boldsymbol{b}cm+\boldsymbol{b}^2d}{b^2+(a+m)^2} = \frac{\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot((a+m)c+bd)}{b^2+(a+m)^2} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot((m-a)c+bd)}{b^2+(m-a)^2}}{\dfrac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \dfrac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)}\cdot(x-x_Q)$$

$$\mathbf{1} - \frac{ac + cm + bd}{\boldsymbol{b^2 + (a+m)^2}} = \frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)} \cdot (c - x_Q)$$

Met x_Q nog in te vullen!.... $x_Q = \frac{(a+m)c+bd}{\boldsymbol{b^2+(a+m)^2}} \cdot (a+m)\ldots.$

Na gelijknamig maken (met noemer $\boldsymbol{b^2 + (a+m)^2}$) en daarna links en rechts daarmee vermenigvuldigen ontstaat **links**: $b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd$ (**λ**)

en **rechts** :

$$\frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)} \cdot \left(c \cdot (\boldsymbol{b^2 + (a+m)^2}) - (a+m)^2 c - (a+m)bd\right) \qquad (\rho)$$

En we kijken nog eens rustig naar (die tweede factor in) het rechterlid (ρ):

$$\frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)} \cdot \left(\boldsymbol{c} \cdot (b^2 + \boldsymbol{(a+m)^2}) \boldsymbol{- (a+m)^2 c} - (a+m)bd\right)$$

en zien ontstaan:

$$\frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)} \cdot (b^2 c - (a+m)bd)$$

En we kijken nog eens naar het geheel:

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \boldsymbol{\frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)}} \cdot (b^2 c - (a+m)bd)$$

Er zit niets anders op dan naar die (rode) breuk te kijken en gelijknamig te maken!

Die breuk wordt: $\dfrac{\{(a+m)c+bd\}\cdot\left\{b^2+(m-a)^2\right\}-\left\{b^2+(a+m)^2\right\}\cdot\{(m-a)c+bd\}}{\left\{(a+m)^2c+(a+m)bd\right\}\cdot\left\{b^2+(m-a)^2\right\}-\left\{(m-a)^2c+(m-a)bd\right\}\cdot\left\{b^2+(a+m)^2\right\}}$ $=$

$$\frac{(a+m)b^2c+(a+m)c\cdot(m-a)^2+b^3d+bd(m-a)^2-b^2(m-a)c-b^3d-(a+m)^2(m-a)c-(a+m)^2bd}{(a+m)^2b^2c+(a+m)^2\cdot(m-a)^2c+(a+m)b^3d+(a+m)\cdot(m-a)^2bd-(m-a)^2b^2c-(m-a)^2c\cdot(a+m)^2-(m-a)b^3d-(m-a)(a+m)^2bd}$$

$$=\frac{(a+m)b^2c+(a+m)c\cdot(m-a)^2+bd(m-a)^2-b^2(m-a)c-(a+m)^2(m-a)c-(a+m)^2bd}{(a+m)^2b^2c+(a+m)b^3d+(a+m)\cdot(m-a)^2bd-(m-a)^2b^2c-(m-a)b^3d-(m-a)(a+m)^2bd}$$

$$=\frac{ab^2c+b^2cm+c(m-a)(m^2-a^2)+\mathbf{bdm^2}-2abdm+\mathbf{a^2bd}-b^2cm+ab^2c-c(a+m)(m^2-a^2)-\mathbf{a^2bd}-2abdm-\mathbf{bdm^2}}{\mathbf{a^2b^2c}+2ab^2cm+b^2cm^2+ab^3d+\mathbf{b^3dm}+(m-a)(m^2-a^2)bd-b^2cm^2+2ab^2cm-\mathbf{a^2b^2c}-\mathbf{b^3dm}+ab^3d-(a+m)(m^2-a^2)bd}$$

$$=\frac{ab^2c+\mathbf{b^2cm}+c(m-a)(m^2-a^2)-2abdm-\mathbf{b^2cm}+ab^2c-c(a+m)(m^2-a^2)-2abdm}{2ab^2cm+\mathbf{b^2cm^2}+ab^3d+(m-a)(m^2-a^2)bd-\mathbf{b^2cm^2}+2ab^2cm+ab^3d-(a+m)(m^2-a^2)bd}$$

$$=\frac{ab^2c+\mathbf{c(m-a)(m^2-a^2)}-2abdm+ab^2c-\mathbf{c(a+m)(m^2-a^2)}-2abdm}{2ab^2cm+ab^3d+(m-a)(m^2-a^2)bd+2ab^2cm+ab^3d-(a+m)(m^2-a^2)bd}$$

$$=\frac{ab^2c-2abdm+ab^2c-\mathbf{2ac(m^2-a^2)}-2abdm}{2ab^2cm+ab^3d+(m-a)(m^2-a^2)bd+2ab^2cm+ab^3d-(a+m)(m^2-a^2)bd}$$

$$=\frac{2ab^2c-4abdm-2ac(m^2-a^2)}{2ab^2cm+ab^3d+\mathbf{(m-a)(m^2-a^2)bd}+2ab^2cm+ab^3d-\mathbf{(a+m)(m^2-a^2)bd}}$$

$$=\frac{2ab^2c-4abdm-2ac(m^2-a^2)}{2ab^2cm+ab^3d+2ab^2cm+ab^3d-\mathbf{2a(m^2-a^2)bd}}$$

$$=\frac{2ab^2c-4abdm-2ac(m^2-a^2)}{4ab^2cm+2ab^3d-2a(m^2-a^2)bd}$$

$$= \frac{b^2c-2bdm-c\left(m^2-a^2\right)}{2b^2cm+b^3d-(m^2-a^2)bd} = \frac{b^2c-2bdm-c\left(m^2-a^2\right)}{(2bcm+b^2d-(m^2-a^2)d)\cdot \boldsymbol{b}}$$

We hadden:

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2} - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}}{\frac{(a+m)c+bd}{b^2+(a+m)^2}\cdot(a+m) - \frac{(m-a)c+bd}{b^2+(m-a)^2}\cdot(m-a)} \cdot \left(b^2c - (a+m)bd\right)$$

en maakten er van:

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{\boldsymbol{b^2c-2bdm-c\left(m^2-a^2\right)}}{\boldsymbol{\left(2bcm+b^2d-\left(m^2-a^2\right)d\right)\cdot b}} \cdot \left(\boldsymbol{b}^2c - (a+m)\boldsymbol{b}d\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{b^2c-2bdm-c(m^2-a^2)}{2bcm+b^2d-(m^2-a^2)d} \cdot \left(bc - (a+m)d\right)$$

Het leukst hebben we voor het laatst bewaard: $\boldsymbol{m^2 - a^2 = b^2 + 2b}$ $\quad (\boldsymbol{I})$

dit invullen geeft:

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{b^2c-2bdm-c\left(b^2+2b\right)}{2bcm+b^2d-(b^2+2b)d} \cdot \left(bc - (a+m)d\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{-2bdm-2bc}{2bcm-2bd} \cdot \left(bc - (a+m)d\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd = \frac{-dm-c}{cm-d} \cdot \left(bc - (a+m)d\right)$$ vermenigvuldigen met $cm - d$

geeft: $(cm-d)\cdot\left(b^2 + (a+m)^2 - ac - cm - bd\right) = (-dm-c)\cdot\left(bc-(a+m)d\right) \Leftrightarrow$

$$(cm-d)\cdot\left(\boldsymbol{b^2 + a^2} + 2am + m^2 - ac - cm - bd\right) = (-dm-c)\cdot\left(bc-(a+m)d\right) \Leftrightarrow$$

$$(cm-d)\cdot\left(\boldsymbol{m^2 - 2b} + 2am + m^2 - ac - cm - bd\right) = (-dm-c)\cdot\left(bc-(a+m)d\right) \Leftrightarrow$$

$(cm-d)\cdot(2m^2-2b+2am-ac-cm-bd) = (-dm-c)\cdot(bc-(a+m)d) \Leftrightarrow$

$2cm^3-2bcm+2acm^2-ac^2m-c^2m^2-\mathbf{bcdm}-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+bd^2=-\mathbf{bcdm}+ad^2m+d^2m^2-bc^2+acd+cdm$

$\Leftrightarrow 2cm^3-2bcm+2acm^2-\mathbf{ac^2m}-\mathbf{c^2m^2}-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+\mathbf{bd^2}=\mathbf{ad^2m}+\mathbf{d^2m^2}-\mathbf{bc^2}+acd+cdm$

$\Leftrightarrow 2cm^3-2bcm+2acm^2-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+\mathbf{bc^2}+\mathbf{bd^2}=\mathbf{ac^2m}+\mathbf{ad^2m}+\mathbf{c^2m^2}+\mathbf{d^2m^2}+acd+cdm$

$\Leftrightarrow 2cm^3-2bcm+2acm^2-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+\mathbf{bc^2}+\mathbf{bd^2}=\mathbf{ac^2m}+\mathbf{ad^2m}+\mathbf{c^2m^2}+\mathbf{d^2m^2}+acd+cdm$

De allerlaatste stap is natuurlijk het tweede gegeven te gebruiken: $\boldsymbol{c^2+d^2=2cm-2d}$ $\quad(\boldsymbol{II})$

$2cm^3-2bcm+2acm^2-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+\mathbf{b}(\mathbf{2cm-2d})=\mathbf{am}(\mathbf{2cm-2d})+\mathbf{m^2}(\mathbf{2cm-2d})+acd+cdm$

$\Leftrightarrow\quad 2cm^3-2bcm+2acm^2-2dm^2+2bd-2adm+acd+cdm+2bcm-2bd=2acm^2-2adm+2cm^3-2dm^2+acd+cdm$

ꝏ Als je goed kijkt valt ALLES tegen elkaar weg!

De stelling is het eerst geformuleerd/ontdekt door Robert Simson (1687-1768), maar William Wallace (1768-1843) heeft dit het eerst gepubliceerd. Zij zouden vreemd opgekeken hebben bij MIJN (cartesische) bewijs, dat een enorme dosis accuratesse vereist. Het is voor een middelbare scholier WEL goed te volgen, maar om zoiets zelf te schrijven (zonder te spieken) is bijna ondoenlijk. Maar hierboven is bewezen DAT HET KAN….

Veel nut heeft het verder niet, behalve dan dat een vergelijking van De Rechte van Wallace/Simson gemaakt is.

Als toegift schrijf ik die nog even netjes en simpel. **De Rechte van Wallace:** $\boldsymbol{y-b=\frac{c+dm}{d-cm}\cdot(x-c)}$

Merk op dat deze vgl. onafhankelijk is van $\boldsymbol{a}$ . . . Achteraf is dat vanzelfsprekend want met punt $\boldsymbol{P(c,b)}$ en $\boldsymbol{M(m,-1)}$ liggen $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$ vast! ꝏ
Kijk nog maar eens naar de tekening… Net als bij de Rechte van Euler geldt dat wij “constructief” een vergelijking gevonden hebben. Bij de deellijnenstelling vonden wij een formule voor de coördinaten van de ingeschreven cirkel….enz.

OPDRACHT voor mijn 5VWO-leerlingen:

Maak eens een GEOGEBRA-tekening waarbij óók $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{C}$ te verslepen zijn… je weet waarvoor. . . .

Valkenisse, augustus 2018