**LUIDT:**

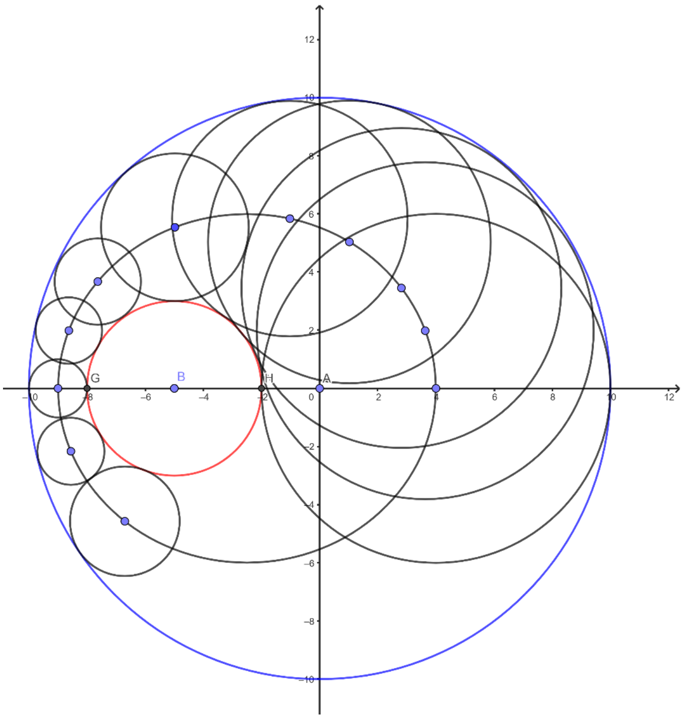
**Als twee cirkels (elk) raken aan een derde cirkel dan ligt het middelpunt van die derde cirkel (die beide gegeven cirkels raakt) op een : "kegelsnede" die door de ligging en grootte van de twee gegeven cirkels op unieke wijze zijn bepaald.**

**Een "kegelsnede" kan hier bijvoorbeeld zijn een hyperbool, of ellips maar ook een cirkel en zelfs een lijn! De "brandpunten" van dergelijke kegelsneden worden bepaald door de middelpunten van de gegeven cirkels.**

**Dit Vermoeden is een uitbreiding van de Stelling van Adriaan van Roomen die uitging van twee cirkels die elkaar uitwendig raakten... te zien op deze website.**

**Onderzocht is NU wat er geldt als de cirkels elkaar inwendig raken ; helemaal los van elkaar staan; inwendig zowel als uitwendig en zelfs wat er geldt als de cirkels elkaar snijden!**

**Situatie nr 1:**
**De cirkels hebben verschillende grootte en de ene ligt binnen de ander.**
**In de figuur hieronder zie je wat er op te merken valt: We zien een kleine (rode) cirkel (links) binnen een grote blauwe cirkel.**




**Het lijkt wel alsof ALLE middelpunten van de rakende cirkels op een ellips liggen. Dit lijkt niet alleen zo, maar IS ook zo!**

**Maar ja, ..... bewijs dat maar eens!**

**Bij een cartesisch bewijs wordt het assenstelsel steeds SLIM gekozen...**

**En dat lijkt hier niet het geval te zijn!**

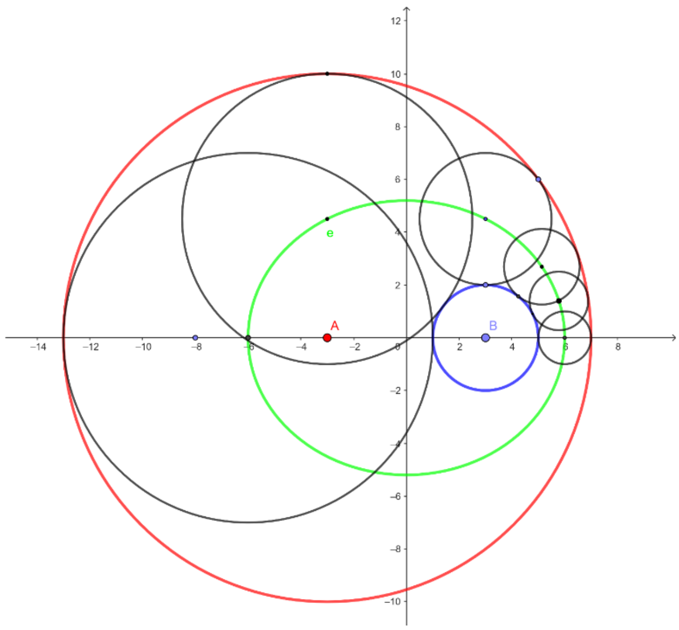
**Wij proberen liever de Oorsprong precies in het midden van de middelpunten!**

**Hier ligt - voor het gemak- de kleine cirkel; (blauw) binnen de (grote) rode cirkel. (nu rechts) ...**
**De middelpunten "zijn" de brandpunten van de (groene) ellips (althans... dat moeten we dus nog bewijzen). We hebben nu de oorsprong O(0,0) precies in het midden daarvan gekozen!**

**Met de maten die je in deze figuur ziet wordt de vergelijking van de ellips:** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

**Bij de kleinste en grootste cirkels zie je de middelpunten (3,0) en (–3,0). De grote cirkel heeft straal 10 en de kleine: straal 2. OA=3 en OB=3 (de letter c als in "brandpuntsafstand"; *c* = 3)**
**De "lange as" loopt van (links:) (-6,0) tot ("rechts:) (6,0) waarmee de gebruikelijke (letter) $a$ de waarde 6 heeft.**

**Volgens de definitie en theorie over ellipsen krijg je dan de vergelijking:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
**met** $b^2 = a^2 - c^2$ **hier:** $b^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$ **... werkelijk...alles klopt als een bus!**
**De "korte as" van de ellips is het dubbele van** $b = \sqrt{27}$
**In feite zien we een beschrijving van een ellips geherdefinieerd!**




**Het voorstel is om een translatie ("verschuiving") toe te passen waarbij de Oorsprong precies in het midden komt, waardoor het middelpunt van de grote cirkel aan de ene kant op dezelfde afstand als het middelpunt van de kleine cirkel aan de andere kant komt te liggen!**
**Dan is het middelpunt van de grote cirkel:** $(-c, 0)$ **en dat van de kleine:** $(+c, 0)$ **.**
**Het meest rechter punt (op de "lange as") van de ellips gaat dan door het midden van** $(c+r, 0)$ $en$ $(R-c, 0)$ **en dat is:**
$\left(\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}r\,, 0\right)$
$a = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}R$ **en met** $b^2 = a^2 - c^2$
**wordt de vergelijking van de ellips:**

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}R)^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}R)^2-c^2}=1$$

**Ja, inderdaad, dat ziet er indrukwekkend uit! ... maar is gewoon:** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

**Neem ter controle eens een aanpassing van het voorbeeld hierboven met**
**straal van de grote cirkel: 10 straal van de kleine cirkel: 2 de afstand tussen de middelpunten 2c = 6 dus c= 3 dan heeft punt P(3 ; 4,5) een afstand tot de kleine cirkel 2,5 omdat het precies (verticaal) boven het middelpunt ligt en afstand tot de grote cirkel:**
**("2 naar rechts en 1,5 omhoog...") óók precies 0,25 en bij invullen in de vergelijking krijg je:**

$$\frac{9}{36}+\frac{4,5\;\cdot\;4,5}{36-9}=0,25+0,75\ldots$$

**Dat de vergelijking van de ellips juist is volgt rechtstreeks uit het feit dat de afstand van een punt** $E(x,y)$ **dat binnen de grote cirkel ligt tot het middelpunt** $(-c, 0)$ **bedraagt:** $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
**De afstand tot de grote cirkel is dan** $R-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
**De afstand tot het middelpunt van de kleine cirkel is** $\sqrt{(c-x)^2+y^2}$ **en de afstand tot de kleine cirkel is:** $\sqrt{(c-x)^2+y^2}\; - \;r$
**Uit de vergelijking** $R-\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(c-x)^2+y^2} - r$ **volgt**
$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2} = r+R$ **en dit is nu precies:** $2a$

We hebben dus $d(E, M_1) + d(E, M_2) = 2a$.
Maar dit is nu juist de definitie van een ellips met
brandpunten $M_1$ en $M_2$. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Voor de geïnteresseerden laat ik hieronder zien hoe je met een punt $S(x, y)$
dat binnen de grote cirkel met middelpunt $(-3, 0)$ en buiten de kleine cirkel met (3,0) van het
voorbeeld met grote straal 10 uit de gelijke afstanden tot de vergelijking van de ellips komt:

$10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(3-x)^2 + y^2} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(3-x)^2 + y^2}$

kwadrateren geeft: $144 - 24\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2 = (3-x)^2 + y^2$

haakjes wegwerken: $144 - 24\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2 = 9 - 6x + x^2 + y^2$

$144 - 24\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = -12x$

$\Leftrightarrow \quad 144 + 12x = 24\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow \quad 12 + x = 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

kwadrateren geeft: $144 + 24x + x^2 = 4 \cdot [(x+3)^2 + y^2]$

haakjes wegwerken:

$\Leftrightarrow \quad 144 + 24x + x^2 = 4 \cdot [x^2 + 6x + 9 + y^2]$

$\Leftrightarrow \quad 144 + 24x + x^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 = 108$ nu links en rechts delen door 108

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

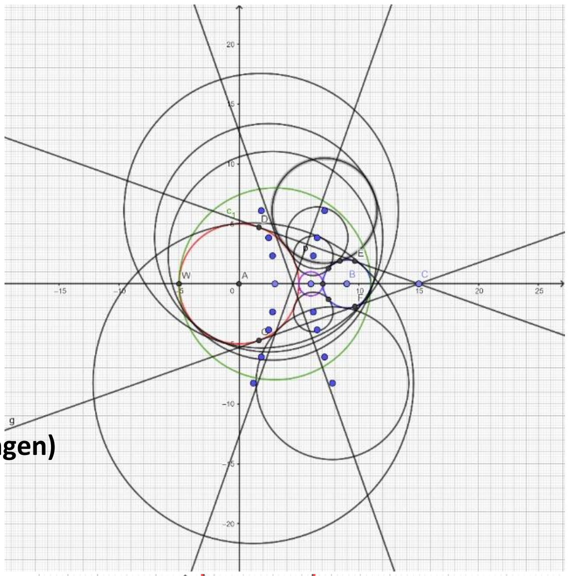
Opdracht nr. 1a aan de lezer: Wat voor plaatje krijg je te zien als $M_1 = M_2$ ?
Inderdaad! Een heel bijzondere kegelsnede…. En dit is echt leuk!
Als je hiervan een Geogebra-plaatje van maakt dan zie je een prachtig sieraad.

Opdracht nr. 1b Probeer eens te doorgronden hoe alles er uit ziet bij: $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$
Ik verklap alvast dat het een klein cirkeltje betreft met straal 1 (links) en een grote met straal 33.
Verder is de brandpuntsafstand c = 15 en komt alles werkelijk mooi uit . . . .

---

Als de twee cirkels elkaar inwendig raken in een punt R dan zal de ellips ook door dat punt gaan.
Als de cirkels elkaar uitwendig raken dan krijg je precies de situatie zoals Adriaan van Roomen eeuwen geleden al had beschreven.
Als daarbij de cirkels een even grote straal hebben, dan ontstaat er weer een bijzondere kegelsnede... Maak er zelf een plaatje bij!

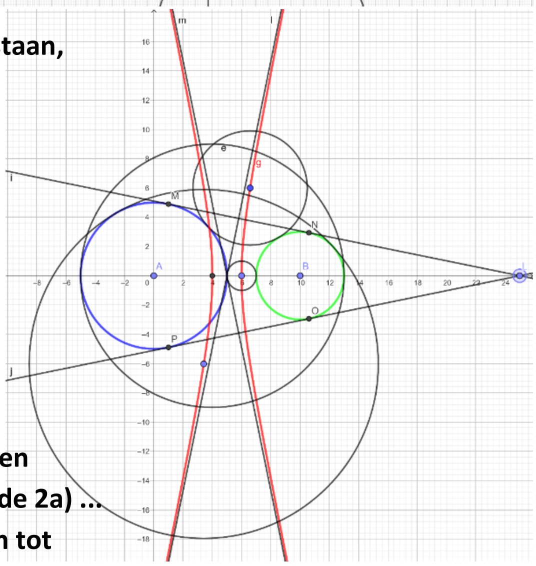
Situatie nr. 2:
We hebben een grote cirkel en er geheel los naast een kleinere cirkel. Hieronder wordt bewezen dat de middelpunten van cirkels die beide gegeven cirkels raken op een hyperbool liggen waarvan de brandpunten zijn: $M_1$ en $M_2$. De allereerste vraag die opkomt is:
. . . en als die cirkels even groot zijn? Je mag er weer een plaatje bij maken, maar ik verklap alvast dat de kegelsnede een rechte lijn wordt en wel: de middelloodlijn van $M_1$ en $M_2$.
Hieronder twee Geogebra-plaatjes: Een -niets vermoedend-met enkel wat middelpunten
en eentje met een hyperbool erin.



Mijn advies is: blijf niet hangen in het construeren van middelpunten van rakende cirkels maar gebruik dat Vermoeden:

Opmerkelijk is dat er kleine cirkeltjes zijn met hun middelpunt op de rechtertak van de hyperbool en "grotere" die "omhullend" raken ...
met middelpunten op de linker tak.

Er is een punt L van waaruit er gemeenschappelijke raaklijnen aan de 2 cirkels kunnen worden getrokken en de coördinaten zijn vrij eenvoudig (met verhoudingen) uit te rekenen .
Zoiets geldt ook voor de raakpunten M, N, O en P.
Met de middelloodlijnen van MN en OP is na te gaan dat dit precies de asymptoten zijn, die er loodrecht op staan, maar voor de lezers voegt het eigenlijk niets toe!
Waar het -net als bij de ellips- om gaat is dat je de definitie van "de" hyperbool ziet volgen uit de gegevens ...
Wat is "de" definitie van een hyperbool ook alweer?
Bij een ellips was het dat de afstanden tot de brandpunten opgeteld steeds constant was
(die waarde 2a) .



Bij een hyperbool is het dat het verschil van de afstanden tot de brandpunten steeds constant is ( weer zo'n waarde 2a) ...
En nu gaan we niet de oorsprong anders neer leggen om tot de gewenste vergelijking te komen.

Kijk goed: voor een punt $H(x,y)$ op de hyperbool geldt dat $d(H,c_1) = d(H,c_2)$
en wat zijn die afstanden?
$d(H,c_1) = d(H,A) - R$ en $d(H,c_2) = d(H,B) - r$ als $R$ de straal is van de (grotere) linkercirkel en $r$ die van de kleinere cirkel .
Maar kijk nu eens goed naar de vergelijking: $d(H,A) - R = d(H,B) - r$
Dit betekent dat $d(H,A) - d(H,B) = R - r$ (constant en te vergelijken met 2a)
Het duurt echt even om tot een vergelijking te komen zoals

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daarom noem ik dit relaas: Vermoeden van Raves ...
Het is NIET een compleet cartesisch bewijs, maar het bestaan van de hyperbool is wel aangetoond.

Opdracht nr. 2 Wat als $R < r$ ?
Aan de uitdrukking voor L (zelf maken!) zie je dat dit punt rechts ligt als $R > r$ ...en links als ...

**Nu komt situatie nr. 3**

**In de figuur hierna zie je een grote rode cirkel met middelpunt (0,0) ....inderdaad NIET SLIM gekozen...en een kleinere (blauwe) cirkel met middelpunt nog wel binnen de rode maar waarvan een deel erbuiten ligt,**

**De cirkels verdelen elkaar in 3 vlakdelen: I ("links") binnen de rode maar buiten de blauwe... hier zijn de afstanden van een punt (op een ellips) : E gelijk aan:** $R - d(E, A)$ **en** $d(E, B) - r$

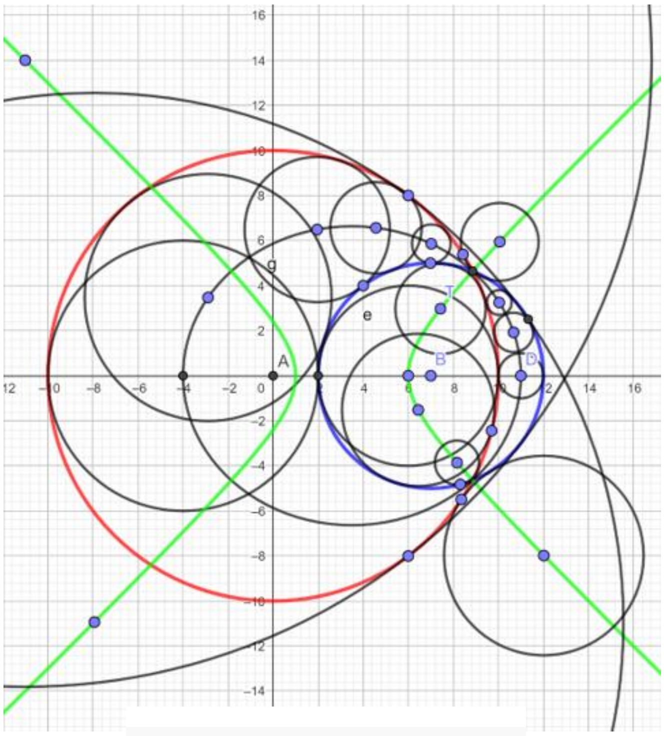
**II ("midden") binnen de rode EN binnen de blauwe:**

**afstanden: van een punt H (op hyperbool)** $R - d(H, A)$ **en** $r - d(H, B)$

**III ("rechts") buiten de rode maar binnen de blauwe:**

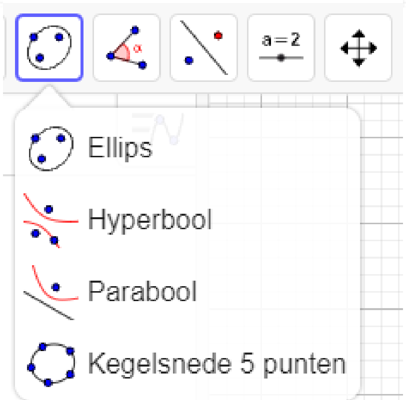
**afstanden van een punt E (op een ellips) : gelijk aan:** $d(E, A) - R$ **en** $r - d(E, B)$

**De ellips en de hyperbool snijden elkaar precies daar waar de cirkels snijden en er zijn punten op de linker tak van de hyperbool die "omhullend raken".... naast punten op de hyperbool buiten de cirkels die "uitwendig" raken ... EN ALLES GEHEEL IN DE DEFINITIES VAN DE ELLIPS EN HYPERBOOL! We hoeven verder niets te bewijzen!**



**Dit plaatje zegt gewoon ALLES!**

**Opdracht nr. 3:**
**Maak zelf zo'n Geogebra-plaatje met de blauwe cirkel bijvoorbeeld LINKS.**
**In Geogebra kun je de brandpunten (die middelpunten van de gegeven 2 cirkels) van zowel ellips als hyperbool aanklikken en laat je als derde punt die kegelsnede gaan door een snijpunt van de cirkels dan krijg JIJ ook zo een juweel van een plaatje!**




**Het Vermoeden van Raves is behoorlijk bewezen, maar nog niet geheel cartesisch...**
**Opdracht nr.4: Maak het maar af!**

**Met dank voor je aandacht! Dit was zware kost; diverse andere items op mijn website zijn veel makkelijker! Stuur oplossingen en/of feedback naar [ton@raves.nl](mailto:ton@raves.nl)**