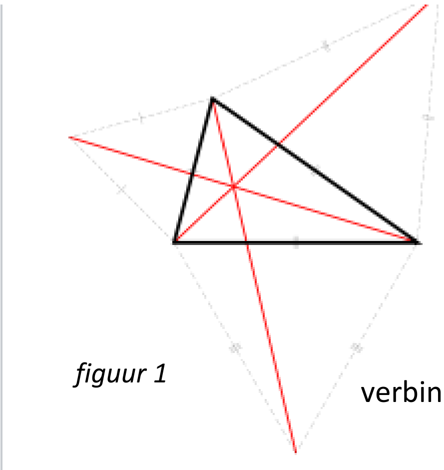
Het Punt van Torricelli www.raves.nl

Een van de mooiste stellingen uit de meetkunde is die van het **Punt van Torricelli**.

Het was een opdracht/uitdaging van de Franse wiskundige **Fermat** aan Evangelista Torricelli:



figuur 1

Is het mogelijk het punt T te bepalen waarbij de som der afstanden tot elk van de hoekpunten van een willekeurige driehoek minimaal is?

In de figuur links is dat het snijpunt van de rode lijnen.

Fermat had zelf een mooie oplossing: breng aan de zijden van de driehoek **gelijkzijdige driehoeken** aan en verbind die met de hoekpunten zoals de figuur ook suggereert.

In plaats van de gelijkzijdige driehoeken naar “buiten toe” kun je ook de driehoeken naar binnen toe omklappen. Niemand minder dan Napoleon de Bonaparte had dat (in zijn jonge jaren) ook opgemerkt en met de zwaartepunten van al die gelijkzijdige driehoeken een stelling geformuleerd en gepubliceerd. Maar vermoedelijk hadden Torricelli en zijn leerling Viviani dit al eerder ontdekt, maar nog niet gepubliceerd. Het sluit namelijk naadloos aan bij het bewijs van zowel de methode van Fermat als die van Torricelli. (Opm. Viviani publiceerde Torricelli’s constructie pas in 1659; 12 jaren na het overlijden van Torricelli).

Fermat gebruikte simpel de (rode) hulplijnen die van de buitenste hoekpunten naar de tegenoverliggende hoekpunten getrokken werden.

Torricelli gebruikte de omgeschreven cirkels van die gelijkzijdige driehoeken! Die snijden (uiteraard behalve in de betreffende hoekpunten) in Het Punt van Torricelli : T

Beide bewijzen (constructie-methoden) zijn briljant en gebruiken rotaties over 60°...

René Descartes was een tijdgenoot van Torricelli en kende het werk van zowel Fermat als van Torricelli. Hij zal wel een “Cartesisch Bewijs” hebben geprobeerd, maar liep wellicht vast op uitdrukkingen die verbanden met hoeken eisten.

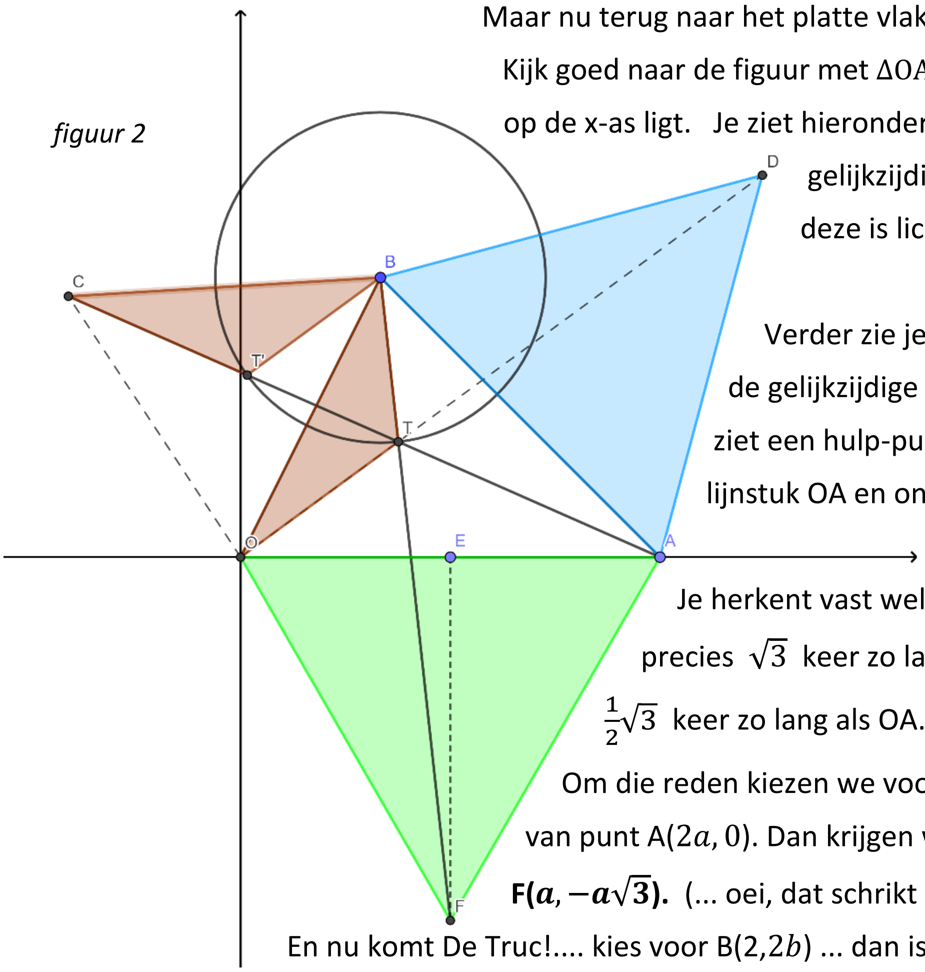
Hoeken laten zich niet makkelijk “vertalen” in cartesische coördinaten! En eigenschappen van hoeken op/binnen een cirkel al helemaal niet. Vermoedelijk kende René die omzettingsformules (bovenin) wel, maar het opstellen van vergelijkingen van lijnen met zoveel “wortel 3” gebonden expressies eist een griezelige accuratesse! Elders op deze website zijn eigenschappen van rotaties over +60° (linksom) en -60° rechtsom getoond en bewezen: $R_{O,+60^\circ}\,(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3}\,,\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)$ en

$$R_{O,-60^\circ}\,(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3}\,,\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)$$

Maar, geef toe... dat schrikt wel een beetje af!

Het opstellen van de x- en y- coördinaten van “Dat Punt”: T is een enorme klus, laat staan het aantonen dat met “Dat Punt” de totale afstand (tot de hoekpunten) minimaal is....
Om met het laatste te beginnen: stel dat je een expressie hebt van de coördinaten van dat punt T . Hoe laat je dan eigenlijk zien dat de afstanden hiervan tot de hoekpunten minimaal is? Afgeleide nul stellen?... “**afgeleide**” waarnaar? Zowel x als y ? Dat begrip kende Descartes toen nog niet. (Leibniz, die ook een bewonderaar was van Descartes later wel, maar ook hij waagde zich hier niet aan!)
Van deze “les” is de bedoeling dat wij eerst de gedachten van Fermat en Torricelli meetkundig gaan volgen en snappen dat er zo’n punt T is... méér niet!
Vervolgens wordt getracht de coördinaten van dat punt **cartesisch** vast te stellen.
Maar hierbij beloof ik je cartesische coördinaten van het gezochte/gevraagde punt T.
Zowel René, als ik en velen met en voor mij buigen eerbiedig voor de wetmatigheden, die De Schepper voor ons verborgen heeft, nota bene in het wereldje van slechts 2 dimensies!
Einstein onderzocht en deed baanbrekend werk in de wereld van 6 dimensies, lengte, breedte, hoogte, tijd, massa, energie... maar had het gevoel dat hij er nog een paar miste.... Net als hij, ben ik - en zijn velen met mij- ervan overtuigd dat wij in een (minstens) 7-dimensionale wereld leven.

figuur 2



Maar nu terug naar het platte vlak met 2 dimensies! Kijk goed naar de figuur met ΔOAB, waarbij punt A op de x-as ligt. Je ziet hieronder punt D van een gelijkzijdige driehoek ABD. deze is lichtblauw gekleurd.

Verder zie je in het lichtgroen de gelijkzijdige driehoek OAF. Je ziet een hulp-punt E, het midden van lijnstuk OA en onderin punt F .

Je herkent vast wel dat lijnstuk EF precies $\sqrt{3}$ keer zo lang is als OE, of $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ keer zo lang als OA.
Om die reden kiezen we voor de coördinaten van punt A$(2a, 0)$. Dan krijgen we E$(a, 0)$ en **F**$(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{3}})$**.** (... oei, dat schrikt meteen af!...)
En nu komt De Truc!.... kies voor B$(2{,}2b)$ ... dan is het midden van lijnstuk OB het punt met coördinaten: $(1, b)$. Dit punt is overigens NIET getekend.

De eerste vraag die bij je opkomt is: Mag dat zomaar? Jawel want door de figuur te verkleinen/vergroten (evt. te draaien) kun je die coördinaten zo vastleggen!

Je voelt dat er nu gerekend kan worden en cartesische coördinaten ingevuld kunnen worden.... MAAR... wacht even!

Eerst iets over de constructie van Fermat:

Met punt T het snijpunt van AC met BF ontstaan er een driehoek OBT die verderop even groot weer tevoorschijn komt!

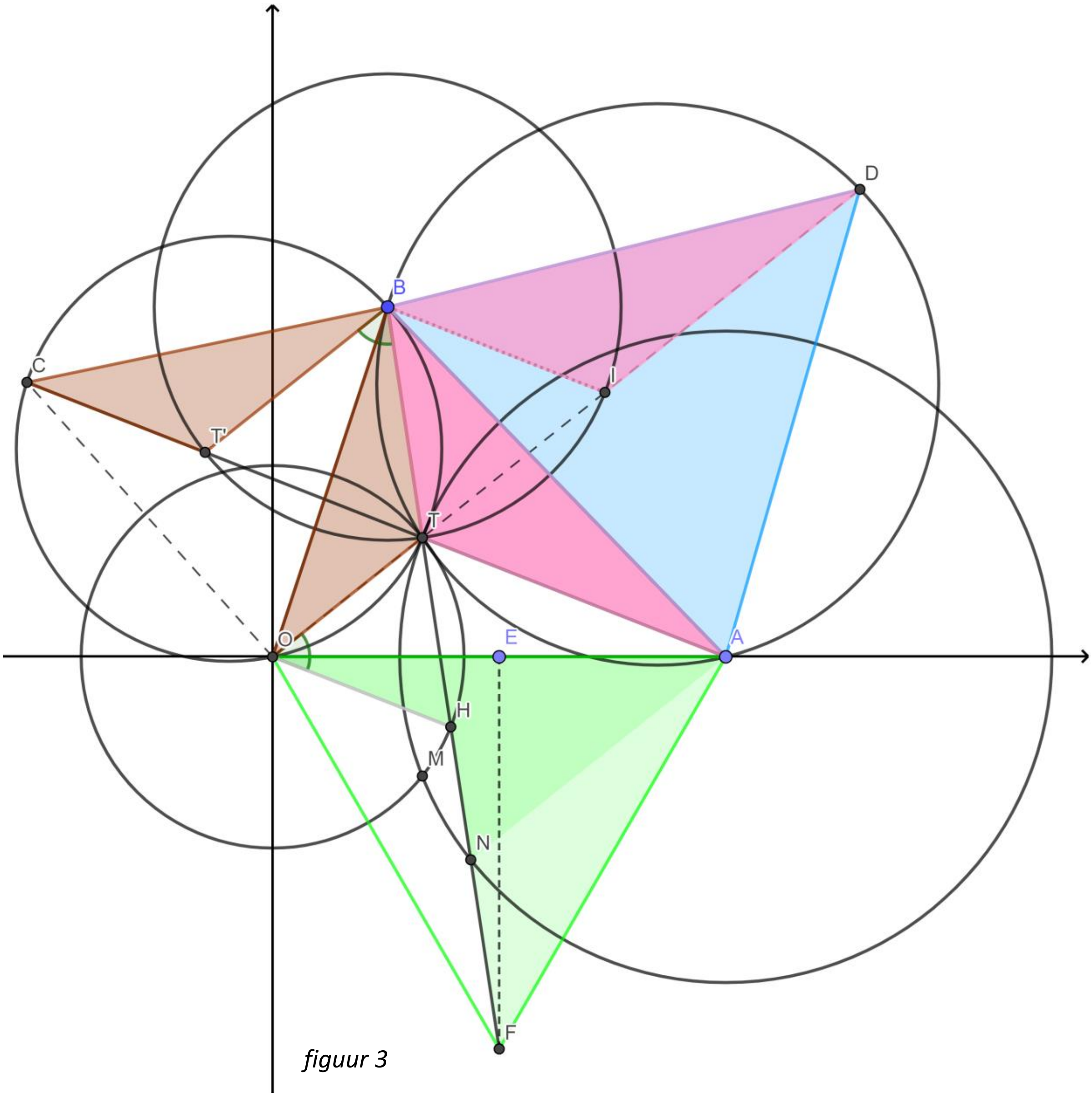
En nu komt het briljante!

Bij een rotatie rond punt B (...!) over -60° zal het beeldpunt van punt T een punt T' zijn.

Je ziet dat punt op een cirkel liggen...

Die punten T; T' en B vormen uiteraard een gelijkzijdige driehoek.

Maar de beeldfiguur van de HELE driehoek OTB zal een driehoek zijn waarbij het beeld van punt O terecht komt op punt C en punt T terecht komt op T' (oranje driehoeken)



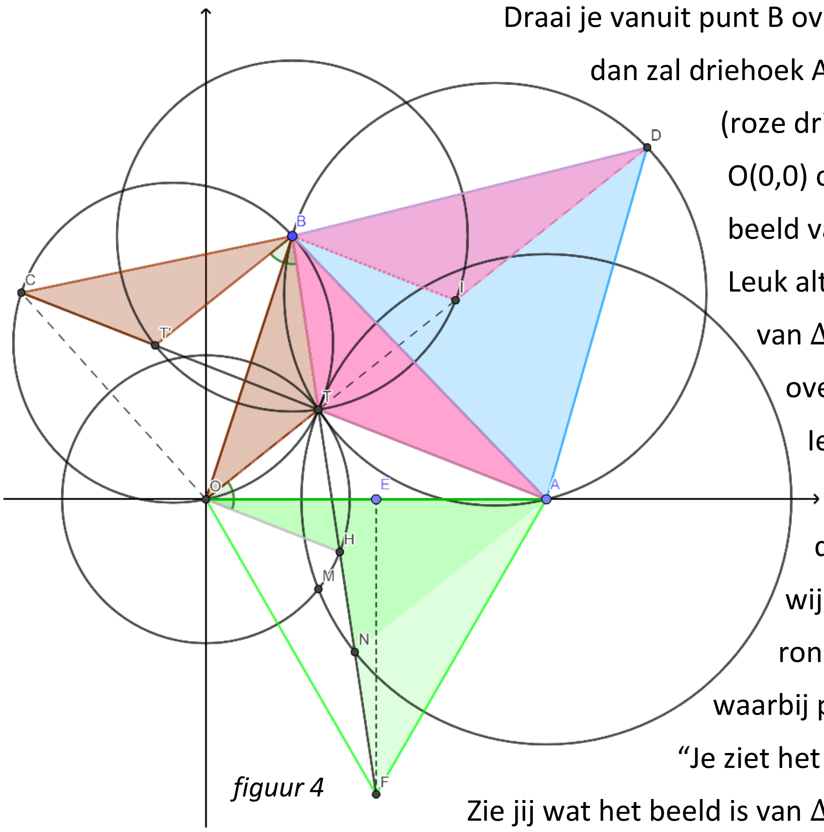
figuur 3

Hieronder zie je de vorige figuur nog eens verkleind. Draai je vanuit punt B over +60° (tegen de wijzers in) dan zal driehoek ABT terecht komen op ΔDBI (roze driehoeken) en draai je om O(0,0) over -60°dan is Δ OFH het beeld van Δ OAT.

Leuk alternatief: Wat is het beeld van Δ OAT bij rotatie om punt A over +60°?

Iedereen die het ziet heeft door dat je de roze driehoek ABT ook met de wijzers van de klok mee (-60°) rond punt A kunt draaien, waarbij punt B terecht komt op D.

"Je ziet het pas als je het doorhebt"...



figuur 4

Zie jij wat het beeld is van Δ OTB als je om O draait? Uiteraard weer over +60°?

Druk het plaatje af en pak een geodriehoek of liniaal erbij!

Dit is echt leuk om te checken!

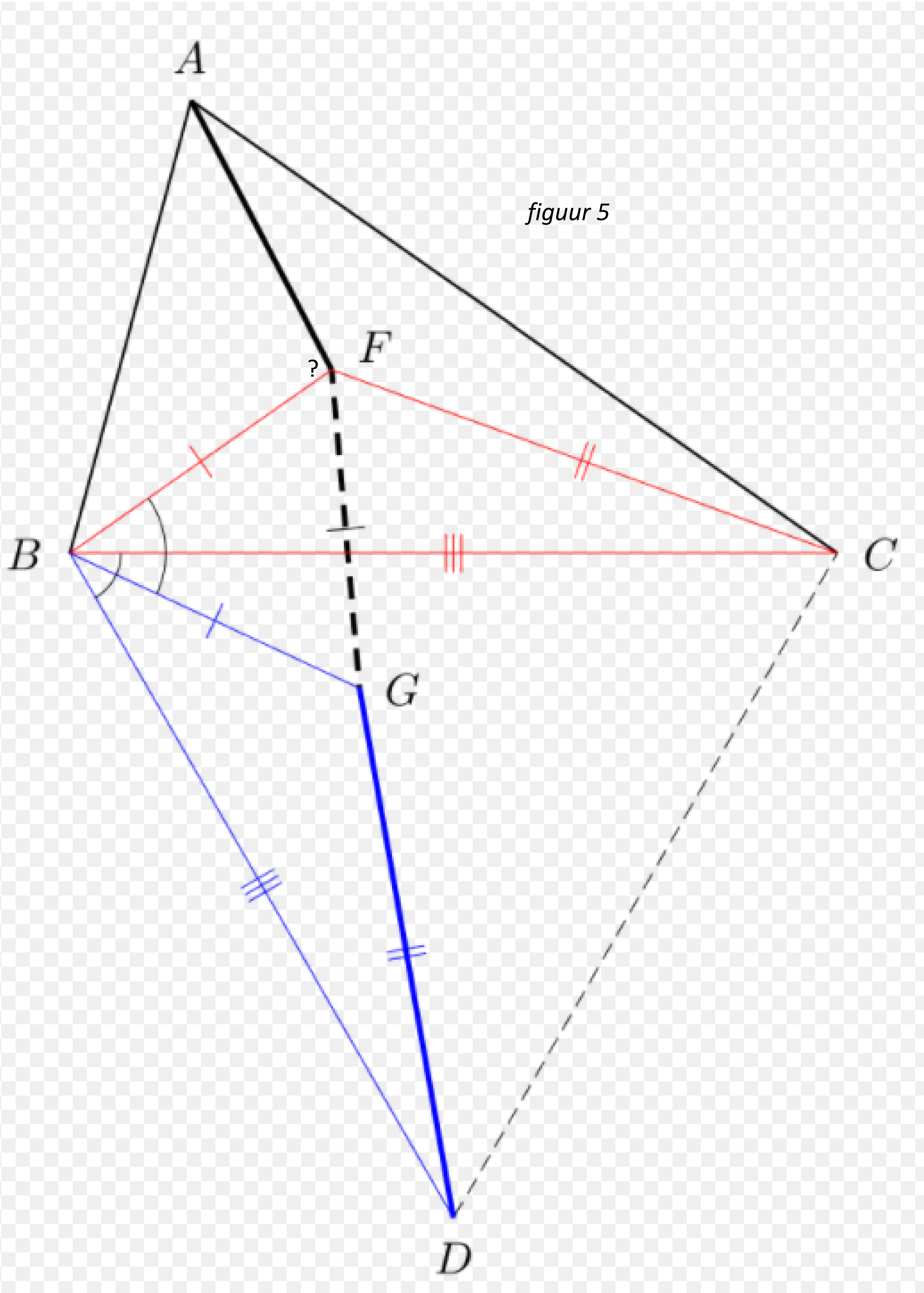
Je zult verbaasd staan over de hoeveelheid hoeken van 60° .

En onmiddellijk is duidelijk dat ∠OTA = ∠ATB = ∠BTO =120°. Nou ja, ... dat lijkt wel zo! Maar is dit ook te bewijzen?

En de drie lijnen OD, AC en BF schijnen elkaar te snijden in zes deelhoeken die alle 60° zijn! Opmerkelijk! Nogmaals: Is dit ook te bewijzen??

Hieronder zie je hoe als je punt T verbindt met het hoekpunt "onderin" er met de rotatie over -60° er congruente driehoeken ontstaan. Helaas heb ik daarvóór de punten verkeerd genoemd: bijvoorbeeld punt F (van Fermat) i.p.v. punt T... Maar je ziet dat ∠BGD gelijk zou moeten zijn aan 120°. Hierbij is 60° "rechtsom" gedraaid t.o.v. punt B...

Er is een willekeurige driehoek ABC gekozen i.p.v. Δ OAT ... De bedoeling is dat je ziet dat behalve ∠BGD **daarna** ook ∠AFB gelijk **lijkt** te zijn aan 120°... En dan ligt A op de lijn door F, G en D op de gestrekte hoek van 60°+ 120°= 180°.



De punten A, F, G en D **lijken** op één lijn te liggen! In de schets hierboven heb ik dat expres anders laten lijken! Fermat gaf wel een constructie met het **vermoeden** dat dit werkt (-e), maar géén bewijs! Alles staat en valt met die hoeken van 120°... en hun deelhoeken van 60°...En daar komt Torricelli met de wijsheid van de oude Grieken zoals Thales van Milete om de hoek kijken! **Torricelli nam de omgeschreven cirkels van de gelijkzijdige driehoeken**.

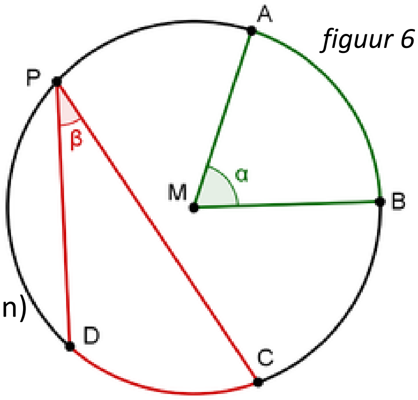
Twee omgeschreven cirkels heb ik expres al getekend in de figuren hierboven:

De omgeschreven cirkel van ΔOBC en die van ΔABD.

Thales van Milete beschreef in een van zijn stellingen dat de “booghoeken” OCB en OTB opgeteld 180°moeten zijn en bewees dit zoals hieronder in het algemeen wordt gesteld voor “booghoeken” ...

Wat zijn “booghoeken”? Zie de volgende figuur:

De hoeken α en β zijn “booghoeken” omdat ze een cirkelboog bestrijken. Bij punt P is β de hoek die aan de “overkant” de cirkelboog CD (rood gekleurd) vastlegt. En bij het middelpunt *M* is hoek α de hoek die booglengte *AB* bepaalt. (groen)

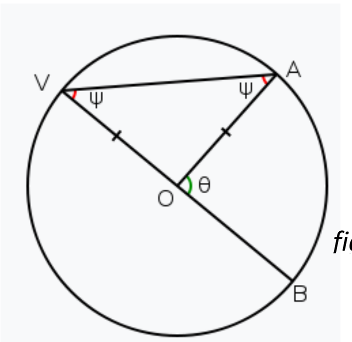


figuur 6

Één van de belangrijkste stellingen van Thales is dat de booghoek van IEDER WILLEKEURIG punt op de cirkel BUITEN de boog AB half zo groot is als de middelpuntshoek (α) .

Dus in het voorbeeldfiguur hierboven geldt: $\angle APB = \angle ADB = \angle ACB = \frac{1}{2}\alpha$

Allereerst is mijn vraag: Pak je geodriehoek er eens bij en ga eens meten? Klopt het?



figuur 7

Thales stelt dat $\angle$ OVA = $\frac{1}{2}$ $\angle$ BOA (hierbij is AB de “boog”.)

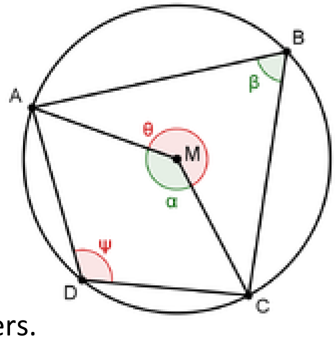
Probeer eens zelf het bewijs daarvan op te schrijven door gebruik te maken van het feit dat de optelling van de hoeken in een driehoek altijd 180° is.

De meeste mensen kennen “Thales” slechts van de situatie dat als de middelpuntshoek 180° is (een middellijn of “diameter”) dat dan de “buitenhoek” 90° moet zijn. Je ziet daarvan een cartesisch bewijs op deze website!

Maar net zo belangrijk is de stelling van Thales dat als je NIET een buitenpunt buiten de boog neemt, maar kijkt naar een punt op de cirkelboog erbinnen... er een soort situatie met een “koordenvierhoek” ontstaat, te zien in de volgende figuur:

Thales beweert dat $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

De overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn “supplementair”. (opgeteld 180°) ...



figuur 8

Ook dit is makkelijk te bewijzen en is een **opdracht** aan alle lezers.

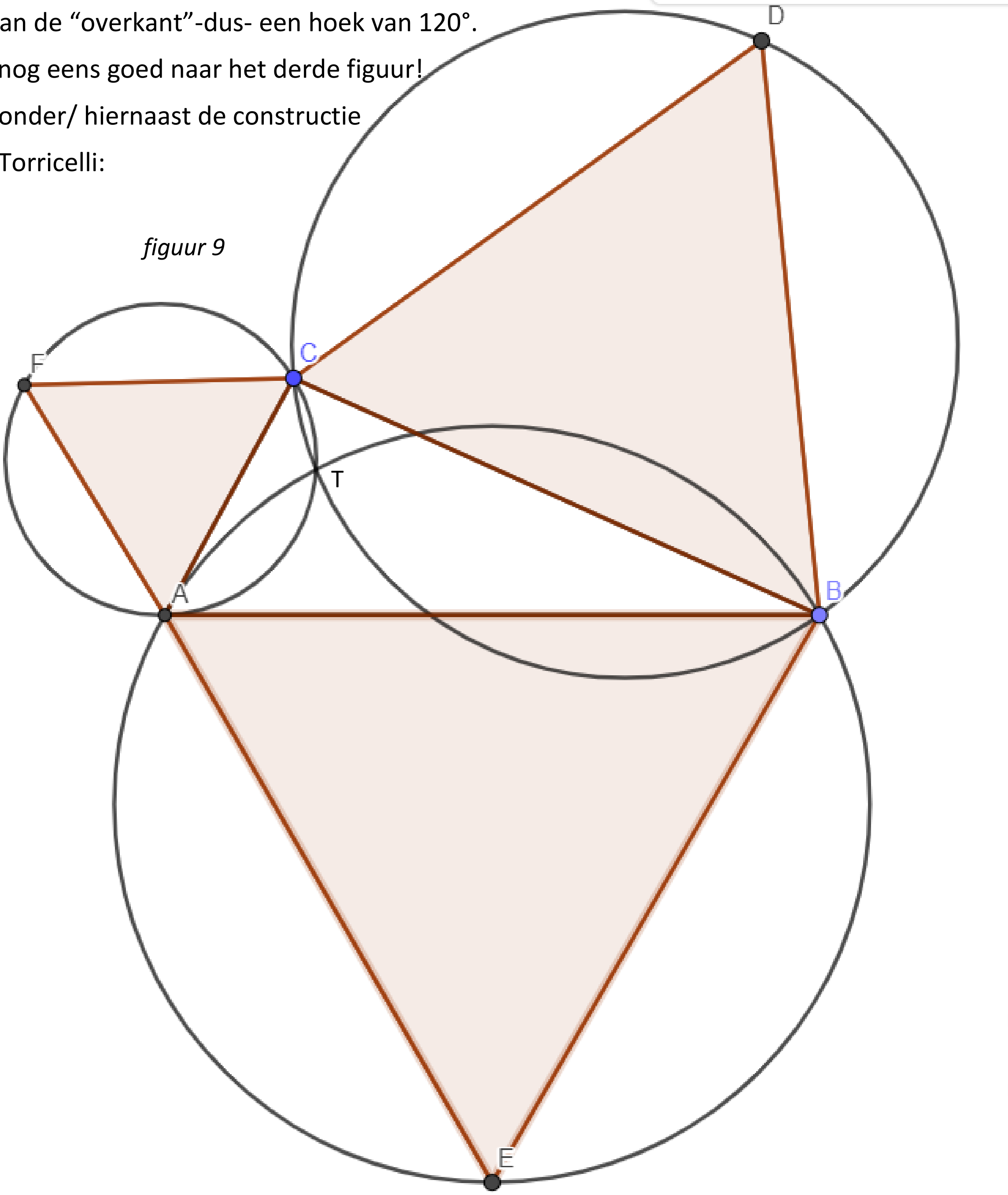
Je mag het eerst eens nameten, maar inmiddels durf je wel te combineren!

Dit zagen de Oude Grieken als een leuke uitdaging! Nog ver vóór Socrates!

En NU KOMT “HET” :   Thales wist destijds al dat die hoeken rond het “punt van Torricelli” allemaal 120° groot moesten zijn! Torricelli ook! Want met de omgeschreven cirkels ontstaan er telkens “koordenvierhoeken” waarbij aan de buitenzijde een hoek van 60° zit en aan de “overkant”-dus- een hoek van 120°.

Kijk nog eens goed naar het derde figuur!

Hieronder/ hiernaast de constructie van Torricelli:

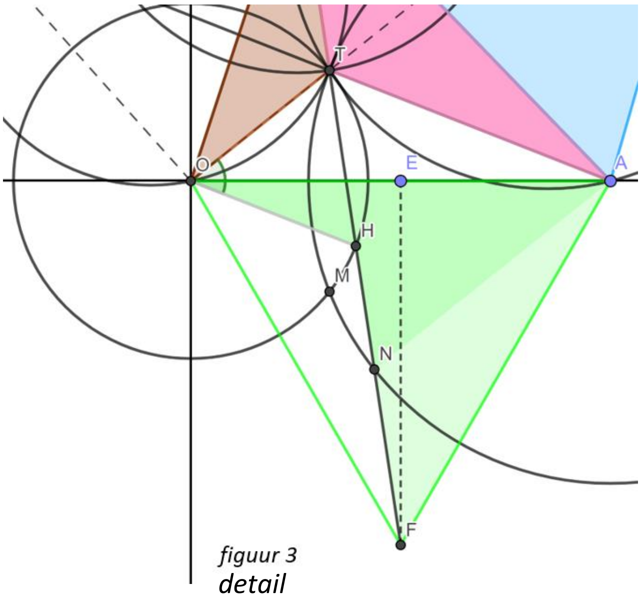


figuur 9

Elders op mijn website staat een “Oude Stelling” dat als 3 cirkels elkaar snijden de drie “koorden” elkaar in één punt snijden... In het geval van omgeschreven cirkels van gelijkzijdige driehoeken gelegd aan een willekeurige driehoek ABC... is dat snijpunt **Het Punt van Torricelli** en de hoeken van de verbindingslijnstukken zijn volgens Thales 120° .

Nu moeten we nog bewijzen dat de punten C, T en E op één lijn liggen, net als de punten A, T en B en uiteraard B, T en F.

Daarvoor keren we terug naar de derde figuur, waarvan een detail:



figuur 3
detail

Nu dat we dankzij Thales weten dat $\angle$ OTA = 120°en $\angle$ OHF = 120°en weten dat ook $\angle$ OHT= 60° blijkt $\angle$ THF een gestrekte hoek te zijn.

Je had ook om punt A kunnen draaien over 60°. Dan blijken $\angle$ ANF (van 120°) en $\angle$ ANT (van 60°) samen een gestrekte hoek (van 180°) te vormen

Omdat ook $\angle$ OTB = 120° en $\angle$ OTH=60° blijken alle punten B, T, H, N en F op één te liggen!

Samengevat: punt T bestaat, maar we moeten nu nog aantonen dat de som der lijnstukken BT+OT+AT minimaal is!
En dit is weer leuk: OT=TH (even lang) en AT=HF en die somlengte is dus : BT+TH+HF
De kortste verbindingslijn(-stuk) tussen punten is als die punten op één lijn liggen.
De buitenste punten B en F liggen vast en eisen voor de totaal-afstand dat T en H op de lijn BF liggen. En dat is hier het geval!

Nu keren we terug naar figuur 2 (pagina 2) met O(0,0), A(2a,0) en B(2,2b)
Probeer die formule $R_{O,-60^\circ}\,(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3}\ ,\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\sqrt{3}\ \right)$ eens uit
op punt A(2a,0) en kijk eens of jij ook netjes punt F($a, -a\sqrt{3}$) krijgt?
Ga na dat C$\left(1-b\sqrt{3}, b+\sqrt{3}\right)$ en D($a+b\sqrt{3}+1\ ,\ a\sqrt{3}+b-\sqrt{3}$).
punt D is te “maken” door eerst een translatie “naar links” uit te voeren zodat punt A op O(0,0) terecht komt, dan een rotatie over –60° (volgens bovenstaande formule) en daarna weer over (+2a, 0) terug naar rechts te schuiven.
We gaan nu een vergelijking (vgl.) opstellen van lijn AC en die combineren (“snijden”) met die van BF, om de x-coördinaat van punt T te vinden.
Om de y-coördinaat van punt T te vinden gebruiken we daarna lijn OD: $y = \frac{a\sqrt{3}+b-\sqrt{3}}{a+b\sqrt{3}+1} \cdot x$
vgl lijn AC: $y = \frac{b+\sqrt{3}}{1-b\sqrt{3}-2a} \cdot (x-2a) \Leftrightarrow y = \frac{b+\sqrt{3}}{1-b\sqrt{3}-2a} \cdot x + \frac{-2a\sqrt{3}-2ab}{1-b\sqrt{3}-2a}$
vgl lijn BF: $y - 2b = \frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a} \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = \frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a} \cdot x + 2b - 2 \cdot \frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a} \Leftrightarrow$
$y = \frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a} \cdot x + \frac{-2ab-2a\sqrt{3}}{2-a}$
hierbij is telkens gebruikt $y - y_P = \frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q} \cdot (x - x_P)$ als vgl van een lijn door P en Q

We gaan de vgl'n voor AC en BF gelijkstellen:

$$\frac{b+\sqrt{3}}{1-b\sqrt{3}-2a}\cdot x+\frac{-2a\sqrt{3}-2ab}{1-b\sqrt{3}-2a}=\frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a}\cdot x+\frac{-2ab-2a\sqrt{3}}{2-a}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{b+\sqrt{3}}{1-b\sqrt{3}-2a}\cdot x+\frac{-2a\sqrt{3}-2ab}{1-b\sqrt{3}-2a}=\frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a}\cdot x+\frac{2ab+2a\sqrt{3}}{a-2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a}\cdot x+\frac{b+\sqrt{3}}{-1+b\sqrt{3}+2a}\cdot x=\frac{2a\sqrt{3}+2ab}{-1+b\sqrt{3}+2a}+\frac{2ab+2a\sqrt{3}}{2-a}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{2b+a\sqrt{3}}{2-a}+\frac{b+\sqrt{3}}{-1+b\sqrt{3}+2a}\right\}\cdot x=\frac{2a\sqrt{3}+2ab}{-1+b\sqrt{3}+2a}+\frac{2ab+2a\sqrt{3}}{2-a}\text{ dus}$$

$$x_T=\frac{\left\{\dfrac{2a\sqrt{3}+2ab}{-1+b\sqrt{3}+2a}+\dfrac{2ab+2a\sqrt{3}}{2-a}\right\}}{\left\{\dfrac{2b+a\sqrt{3}}{2-a}+\dfrac{b+\sqrt{3}}{-1+b\sqrt{3}+2a}\right\}}$$

Het eerste wat opvalt boven de deelstreep is dat er 2 breuken staan met dezelfde teller.

$$\frac{A}{B}+\frac{A}{c}=\frac{A\cdot(B+C)}{B\cdot C}$$

met $B+C=a+b\sqrt{3}+1$ wordt $x_T=\frac{(2ab+2a\sqrt{3}\ )\cdot(\ a+b\sqrt{3}+1)}{(2b+a\sqrt{3})\cdot(-1+b\sqrt{3}+2a)+(2-a)\cdot(b+\sqrt{3})}$

en vullen we deze x-coördinaat in de vgl van OD in: $y_T=\frac{(2ab+2a\sqrt{3}\ )\cdot(a\sqrt{3}+b-\sqrt{3})}{(2b+a\sqrt{3})\cdot(-1+b\sqrt{3}+2a)+(2-a)\cdot(b+\sqrt{3})}$

Zoals beloofd! ... Maar hebben we hier iets aan? Er valt helemaal niets (verder) weg te strepen en het wegwerken van de haakjes geeft niet echt een mooie uitdrukking!

Je krijgt zoiets ook als je AC met OD combineert.

Het punt van Torricelli heeft coördinaten:

T$\left(\frac{2a\cdot(b+\sqrt{3}\ )\cdot(\ a+b\sqrt{3}+1)}{(2b+a\sqrt{3})\cdot(-1+b\sqrt{3}+2a)+(2-a)\cdot(b+\sqrt{3})},\ \frac{2a\cdot(b+\sqrt{3}\ )\cdot(a\sqrt{3}+b-\sqrt{3})}{(2b+a\sqrt{3})\cdot(-1+b\sqrt{3}+2a)+(2-a)\cdot(b+\sqrt{3})}\right)$

Men kan dit wel herschrijven met de x- en y-coördinaten van A, B, C, D en F ...

maar dit levert helaas géén extra inzicht op.

Het wordt tijd dat **wij** ook eens een VERMOEDEN gaan uiten:

In een willekeurige vierhoek is het punt waarbij de som der afstanden tot de hoekpunten minimaal is: ... het snijpunt van de diagonalen.

Zodra je een paar schetsen hebt gemaakt en eens nagedacht hebt in de trant van Torricelli (of die van de Oude Grieken) dan zie je het al!

Veel succes met het onderzoeken en evt. bewijzen ervan! En vooral: veel plezier!

(Ook een waarschuwing! Een cartesisch bewijs is hier wel mogelijk maar volkomen buitenproportioneel). De methode van Cartesius is bepaald niet (altijd) ideaal!