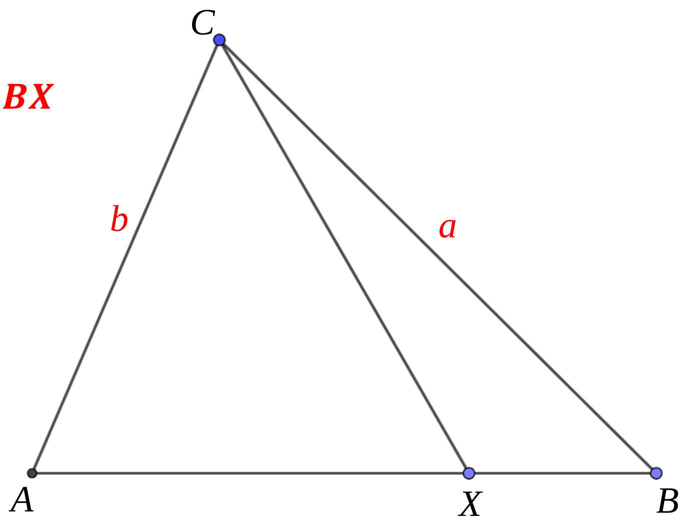
LUIDT: **Als men op de zijde AB van een willekeurige driehoek ABC een willekeurig punt X legt, dan geldt de volgende vergelijking:**

$$c \cdot d^2 = AX \cdot a^2 + BX \cdot b^2 - c \cdot AX \cdot BX$$



hierbij is:

$a = BC$; $b = AC$; $c = AB$ **en** $d = CX$
een en ander zoals is de figuur hiernaast…

Opmerking1: Zo'n lijnstuk CX noemt men ook wel een **transversaal**

Opmerking2: Zou men voor punt X precies het midden van lijnstuk AB nemen, dan ontstaat precies de situatie zoals beschreven in een Stelling van Apollonius… (*)

BEWIJS:

We nemen (weer) voor **punt** $A(0,0)$; $B(1,0)$ en voor $C(p,q)$ met nog onbekende p en q.
Aangezien punt X een willekeurig punt op lijnstuk AB is geven we de coördinaten: $X(x,0)$
met de variabele $0 \leq x \leq 1$.

We bekijken de gevallen $x = 0$ en $x = 1$ verderop apart en nemen nu aan: $0 < x < 1$
Even op een rijtje: $AB = c = 1$ en (vanwege Pythagoras:) $b^2 = p^2 + q^2$
$a^2 = (1-p)^2 + q^2$ en $d^2 = (x-p)^2 + q^2$ **(**)**

Dat deze 3 "simpele" vergelijkingen gelden wordt aan het eind met een apart plaatje nog eens uitgelegd, maar de lezer die weet dat de lengte van een lijnstuk gelijk is aan de wortel uit de optelling van de kwadraten van de verschillen van de x-coördinaten en de y-coördinaten kan nu al verder… (gewoon een kwestie van de Stelling van Pythagoras toepassen op "onze coördinaten"!)… We gaan dit **invullen** in de vgl.:

$$c \cdot d^2 = \quad AX \cdot a^2 \quad + \quad BX \cdot b^2 \quad - \; c \cdot AX \cdot BX$$

$$(x-p)^2 + q^2 = \quad x \cdot ((1-p)^2 + q^2) \quad + (1-x) \cdot (p^2 + q^2) - 1 \cdot x \cdot (1-x) \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2px + p^2 + q^2 = x \cdot (1 - 2p + p^2 + q^2) + p^2 + q^2 - p^2x - q^2x \quad -x + x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2px + p^2 + q^2 = x - 2px + p^2x + q^2x + p^2 + q^2 - p^2x - q^2x \quad -x + x^2$$

En klaar is het bewijs! **<u>Drie regeltjes</u>** slechts met simpele algebra…….

.....Dan is het nu zaak om te kijken wat er gebeurt als $\boldsymbol{x=0}$ **:**

Welnu dan **valt** $\boldsymbol{X}$ **samen met punt** $\boldsymbol{A}$ en is ***d*=*b* ... vervolgens wordt de vgl:** $\boldsymbol{b^2 = b^2}$

Evenzo "triviaal" is de situatie als $\boldsymbol{x=1}$ ....

Misschien is er enige toelichting nodig bij **(**)...** de vergelijkingen met $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ en $\boldsymbol{x}$.

Dit is een kwestie van Pythagoras toepassen op de lengte van een lijnstuk begrensd door de punten $\boldsymbol{C(p,q)}$ en een willekeurig punt $\boldsymbol{D(r,s)}$..

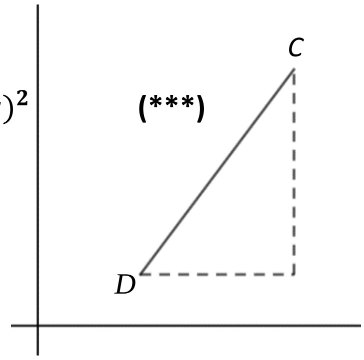
Juist omdat we in een assenstelsel werken waarbij de x-as en de y-as loodrecht op elkaar staan geldt: $\boldsymbol{CD^2 = (p-r)^2 + (q-s)^2}$

zie de schets hiernaast...

En dit is nu gebruikt in het bewijs... meer niet!

De volgorde bij het nemen van de verschillen maakt niet uit, we kwadrateren immers.

(***)



De stelling van Stewart werd in 1746 door de Schotse wiskundige Matthew Stewart opgesteld, maar Archimedes en Appolonius van Perga kenden deze stelling vermoedelijk al heel lang.

Laatstgenoemde heeft **een** stelling achtergelaten in het geval punt $\boldsymbol{X}$ precies het midden $\boldsymbol{M}$ is van lijnstuk $\boldsymbol{AB}$ en onze transversaal gewoon de "**zwaartelijn"** is: $\boldsymbol{CM}$**.**

We noemen dit (hier:) "**De" Stelling van Apollonius (*)**

Deze luidt: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}c^2}$

als in een willekeurige driehoek de "zwaartelijn" $\boldsymbol{CM}$ **het lijnstuk is dat hoekpunt** $\boldsymbol{C}$ **het midden** $\boldsymbol{M}$ **van zijde** $\boldsymbol{AB}$ **verbindt.**

Let op de "spraakverwarring" van **zwaartelijn** en het betreffende **lijnstuk.**

Apollonius van Perga heeft meer stellingen nagelaten, maar niet veel is bewaard gebleven....

Bovengenoemde Stelling is een regelrechte uitbreiding van de Stelling van Pythagoras!

"De" Stelling van Apollonius geeft toegepast op onze driehoek ABC met A(0,0); B(1,0) en C(p,q) een waarde voor $AM = BM = \frac{1}{2}$; punt $M\left(\frac{1}{2},0\right)$ en (weer) voor $c = 1$ en luidt dan:

$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}}$**, hierbij is** $\boldsymbol{a = BC}$ **;** $\boldsymbol{b = AC}$; $\boldsymbol{c = AB}$**=1 en** $\boldsymbol{d = CM}$

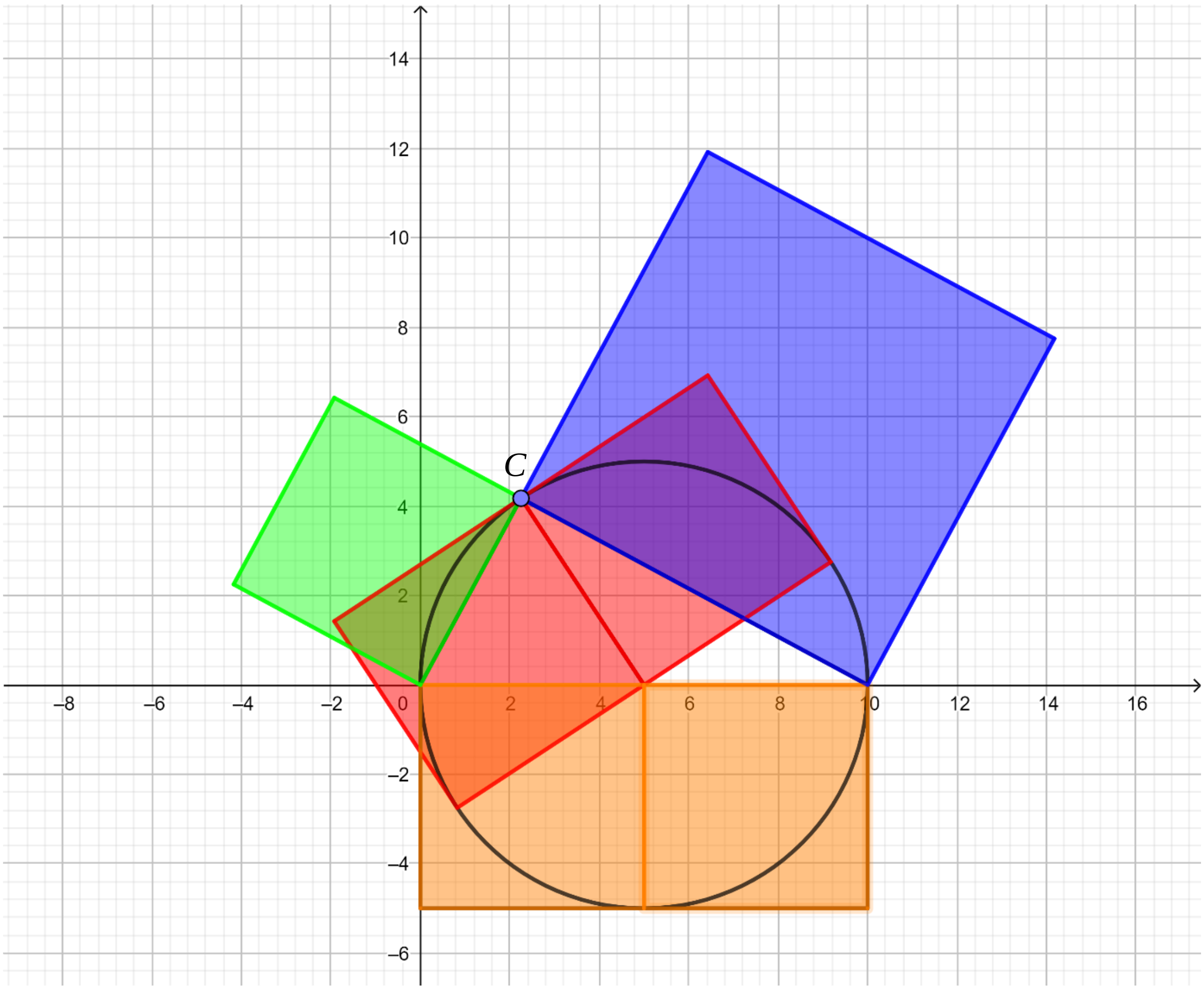
Het is bijzonder boeiend en spannend om zelf eens te proberen om te zien of invullen tot het gewenste resultaat leidt!

Probeer het eens en je zult verbaasd zijn over de eenvoud van dit bewijs. Uitdaging!

Het enige dat je nodig hebt is de regel **(***)** hierboven.

In wiskunde-boeken en zelfs op Wikipedia zie je vaak een bewijs met gebruik van wat goniometrie en met name de cosinusregel. Een dergelijk bewijs is in dit geval NIET KORTER!

De Stelling van Apollonius geeft wel een bijzonder mooi **inzicht** in een stukje meetkunde, namelijk dat de som van de oppervlakten van de vierkanten met “opstaande” zijden AC en BC gelijk is aan de optelling van de oppervlakten van de rechthoeken met zijden CM (de “zwaartelijn”) en AM, zoals te zien is in de volgende figuur:

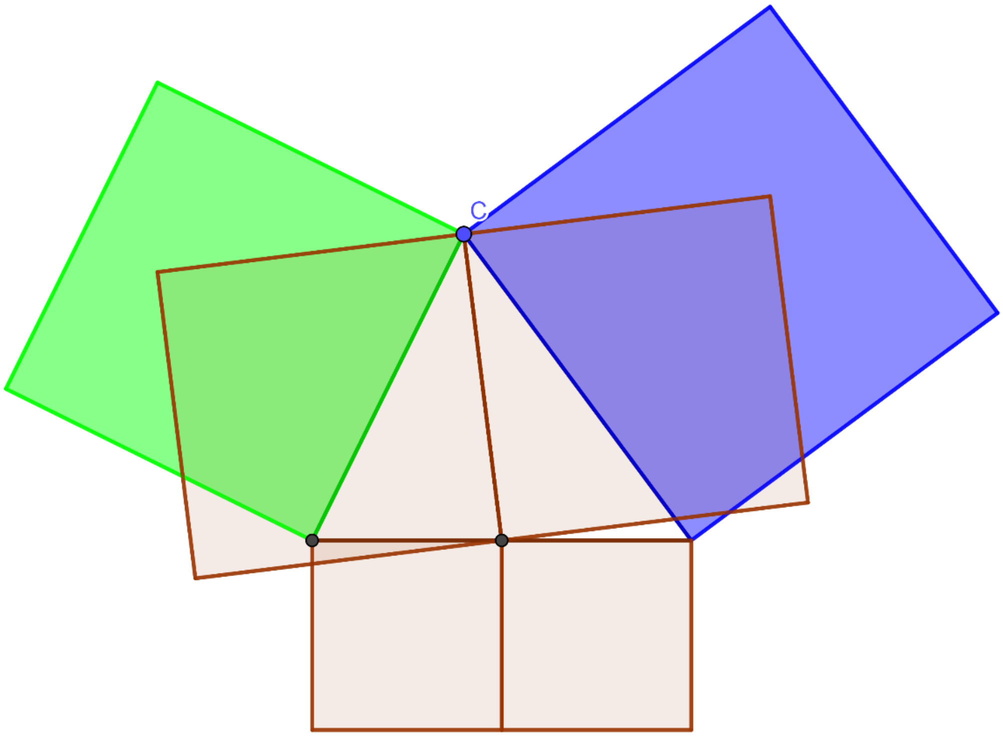


https://www.geogebra.org/classic/udtanqev

De oppervlakten van de oranje en rode rechthoeken opgeteld zijn precies gelijk aan de oppervlakte van het groene en het blauwe vierkant opgeteld.

Dit geldt voor iedere willekeurige driehoek ABC, dus ook voor een driehoek met $\angle C$=90°
En wat we hier dan zien is een speciaal geval van de Stelling van Pythagoras! Als je op de link hierboven klikt dan kun je het hoekpunt C over de cirkel bewegen. Kijk eens naar de figuur als je punt C helemaal naar boven beweegt naar **(5,5)….**

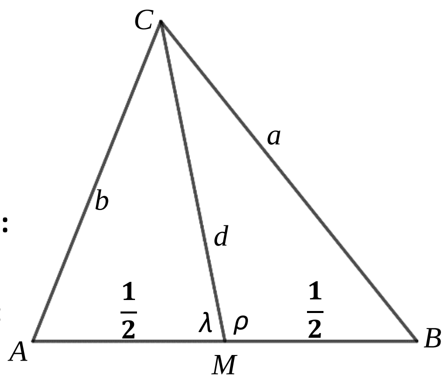
Nog veel boeiender wordt het plaatje als $\angle C$ NIET 90° hoeft te zijn. Dan zie je de Stelling van Apollonius in volle glorie:



https://www.geogebra.org/classic/y9gnayzk

De oppervlakten van de rechthoeken opgeteld is gelijk aan de som der oppervlakten van het groene en het blauwe vierkant. Dit geldt voor iedere willekeurige driehoek $\boldsymbol{ABC}$. Je kunt op de link hierboven klikken en punt $\boldsymbol{C}$ eens slepen naar een andere locatie….

De Stelling van Apollonius kan ook bewezen worden door wat gonio en met name de cosinusregel te gebruiken. Het wordt als toegift hieronder getoond, maar wees eerlijk: Het bewijs dat jij zelf hebt geleverd naar aanleiding van de uitdaging op blz. 2 (onderaan) is toch veel "mooier"?



Hiernaast zie je de figuur met de hoek ρ aan de rechterkant en hoek λ aan de linkerkant. Omdat $\lambda + \rho = 180°$ kunnen we gebruiken: $\cos(\rho) = \cos(180° - \lambda)$.
Verder kennen de "gevorderden" de eigenschap in de gonio:
$\cos(180° - \lambda) = -\cos(\lambda)$ **(****)**
Nu gaan we de cosinusregel toepassen in ΔAMC en ΔMBC:

$$b^2 = (\tfrac{1}{2})^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \cos(\lambda)$$

$a^2 = (\tfrac{1}{2})^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \cos(\rho)$ en je ziet dat dit kan met $\cos(\lambda)$ **(denk aan de plus!)**

Opgeteld: $a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}$ **(want die termen met $\cos(\lambda)$ vallen dan weg)**

Voor "gevorderden" wel leuk om te zien… Deze mensen kunnen (nog) eens kijken naar de Stelling van Napoleon waar ook een bewijs met de cosinusregel mogelijk is.
Inzichten!

Billund juli 2020