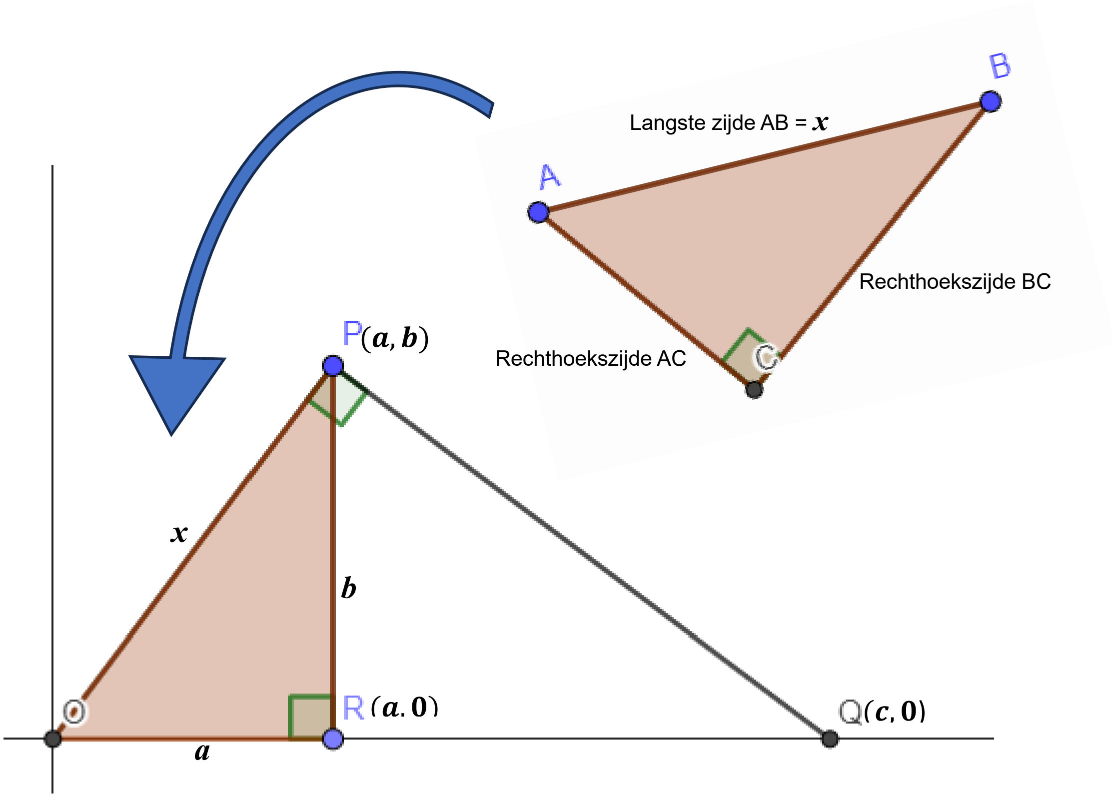
Pythagoras ... een **Cartesisch bewijs**... speciaal voor **MAVO-leerlingen**

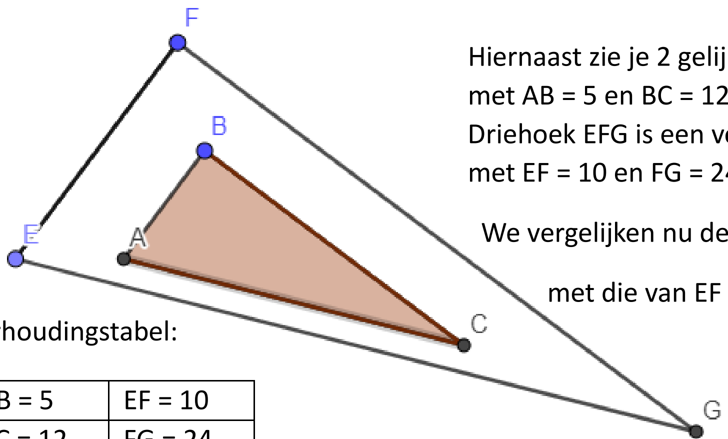


We moeten gaan bewijzen dat de som van de kwadraten van de 2 rechthoekszijden gelijk is aan het kwadraat van de langste zijde. In driehoek ABC: $\boldsymbol{AC^2 + BC^2 = AB^2}$ ... en met kleine letters in de onderste figuur: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = x^2}$ **(voor de Mavoleerlingen is dit even wennen, maar goed te doen!)**

Daartoe plaatsten we driehoek ABC in een assenstelsel zoals je hierboven ziet en trekken vanuit het bovenste punt (voorheen B) ... nu punt $\mathbf{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ geheten een lijn loodrecht op AB ... nu OP geheten.

Die hulplijn snijdt de horizontale as ($\boldsymbol{x}$-as) in punt Q $(\boldsymbol{c}, \mathbf{0})$.

En met enige moeite ontdek je 3 gelijkvormige driehoeken!
driehoek **OPR** ; driehoek **PQR** en driehoek **OQP**.
Bij gelijkvormige driehoeken kun je verhoudingstabellen opschrijven en doorrekenen!
Je kunt dat doen ZONDER EERST EEN VERGROTINGSFACTOR UIT TE REKENEN !
Gewoon goed naar die tabellen kijken en “kruiselings vermenigvuldigen”
Dit staat helaas NIET in het wiskundeboek van 3/4 MAVO, maar let op? Kleine opfriscursus!



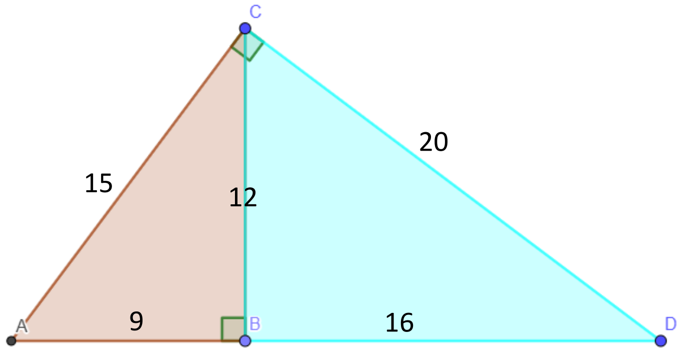
Hiernaast zie je 2 gelijkvormige driehoeken,
met AB = 5 en BC = 12
Driehoek EFG is een vergroting van driehoek ABC
met EF = 10 en FG = 24.

We vergelijken nu de maten van AB en BC

met die van EF en FG en vinden dan de volgende verhoudingstabel:

$$5 : 12 = 10 : 24$$
$$5 \times 24 = 12 \times 10$$

AB = 5	EF = 10
BC = 12	FG = 24



Nog een voorbeeld van gelijkvormige driehoeken: Δ ABC en Δ ACD en Δ CBD

We vergelijken de maten in Δ ABC met die van Δ ACD:

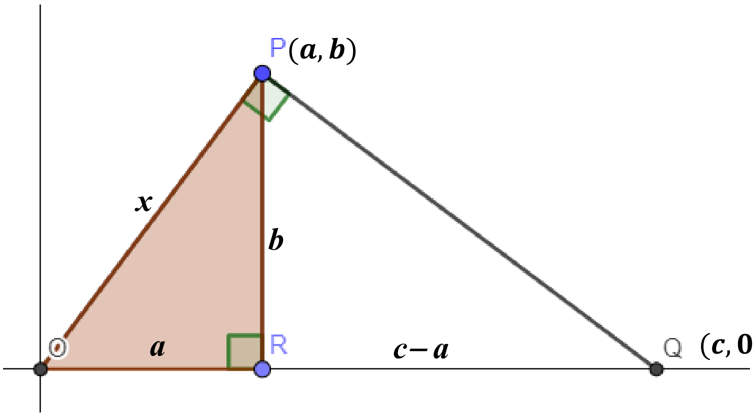
AB = 9	AC = 15
AC = 15	AD = 25

kruiselings vermenigvuldigen :
$9 \times 25 = 15 \times 15$ (= 225... klopt!)

AB = 9	BC = 12
BC = 12	BD = 16

We kunnen ook die van : Δ ABC met die van Δ CBD vergelijken: $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$ en ook dit klopt: $9 \times 16 = 12 \times 12$

Tot nu toe vergeleken we getallen en in het bewijs doen we dat met letters:



$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}}$ en (kruiselings...:) $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{x}^2$

(kleine vergeleken met Δ OPQ) en:

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c-a}}$ (... met Δ PQR) en weer kruiselings vermenigvuldigen geeft:

$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^2$ dus $\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$

en $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$

Conclusie: $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$