

De Stelling van Menelaos . . .

luit: In een willekeurige driehoek ABC met punten op de zijden P, Q en R zoals in de figuur

hieronder, waarbij P, Q en R op één lijn liggen... zal gelden: $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BR}{CR} \cdot \frac{CQ}{AQ} = 1$ (*)

(lijkt op de Stelling van Ceva)...

Een Cartesisch Bewijs **lijkt** vlot te gaan met de keuze:

. . . assenstelsel zodanig kiezen met **A(0,0)** ; **B(1,0)** en **C(a,b)**.

Dan komen er nog variabelen bij: $x_P = c$; dus **P(c,0)** en $x_D = d$.

D ligt op lijn AC:

$$y = \frac{b}{a} \cdot x \text{ dus } y_D = \frac{b}{a} \cdot d \text{ en } \mathbf{D(d, \frac{bd}{a})}$$

VOORDAT we een poging gaan wagen tot een Cartesisch Bewijs graag eerst je aandacht voor een “klassiek bewijs” met behulp van enkele hulp-loodlijnen

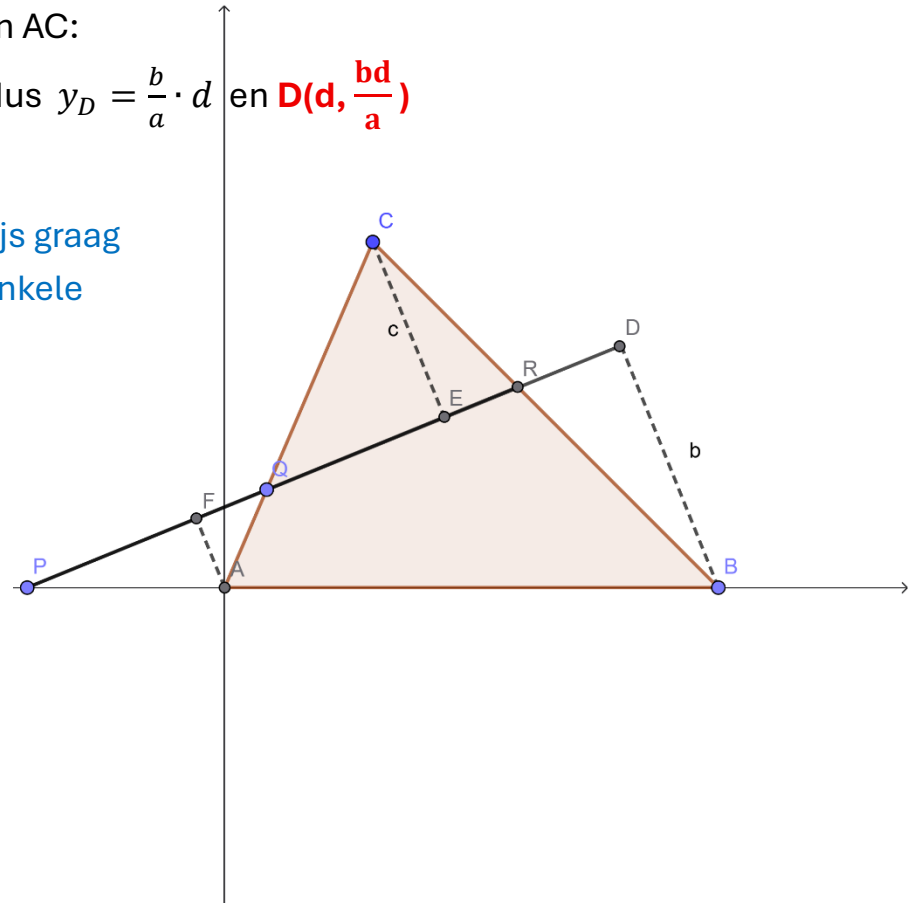
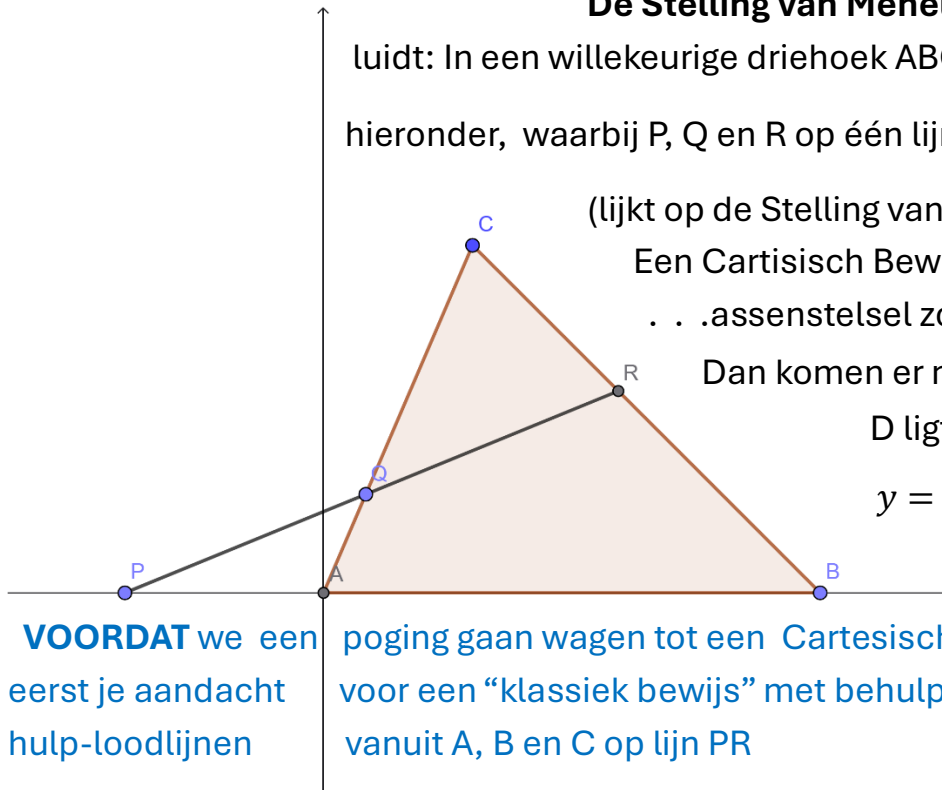
vanuit A, B en C op lijn PR

Er ontstaan gelijkvormige driehoeken ΔBPD en ΔAPF (*F-figuur*)

en $\Delta AFD \sim \Delta DEQ$ (*Z-figuur*) evenals: ΔBDR en ΔCER (*Z-figuur*).

Met $AF = a$ geldt dan $\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b}$ en $\frac{BR}{CR} = \frac{b}{c}$ en $\frac{CQ}{AQ} = \frac{c}{a}$

Daarmee wordt: $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BR}{CR} \cdot \frac{CQ}{AQ} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$



Het klassieke bewijs (hierboven) is kort en simpel. Net zoals het bewijs van de stelling van Pythagoras (ook met gelijkvormigheid van driehoeken) en diverse andere meetkundige stellingen, zoals CEVA. . . .

En JUIST met Pythagoras in het achterhoofd maken we de lengtes van bijv. BR door het kwadraat te bekijken:

$$BR^2 = (x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2 \quad (*)$$

Bij het invullen proberen we zoveel mogelijk te vereenvoudigen; gemeenschappelijke factoren naar voren te halen etc....

We hebben echter de coördinaten van Q en R nog niet. Welnu: Q ligt op AD: $y = \frac{b}{a}x$ dus $Q(d, \frac{bd}{a})$

En lijn PQ: $y = m \cdot ((x - c)$ met $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{bd - 0}{d - c}$

$$PQ: y = \frac{bd}{a(d-c)} \cdot (x - c) = \frac{bd}{a(d-c)} \cdot x - \frac{bcd}{a(d-c)} \quad \text{ga na! (gewoon haakjes weggewerkt)}$$

“PQ en BC gelijkstellen”. . . om de coördinaten van R te vinden. . .

$$BC: y = \frac{b}{a-1}(x - 1) \quad \text{en} \quad \frac{bd}{a(d-c)} \cdot x - \frac{bcd}{a(d-c)} = \frac{b}{a-1}(x - 1) \quad \text{geeft: (alles delen door } b \dots)$$

$$x - \frac{1}{a-1} \cdot x = \frac{cd}{a(d-c)} - \frac{1}{a-1} \quad \text{gelijknamig maken en vermenigvuldigen met } a(d-c) \text{ en met } a-1$$

$$\text{geeft: } [(a-1)d - a(d-c)]x = (a-1)cd - a(d-c)$$

$$\text{Dus: } x_R = \frac{(a-1)cd - a(d-c)}{(a-1)d - a(d-c)} = \frac{(a-1)cd - a(d-c)}{ac-d} \quad \text{zo ver mogelijk}$$

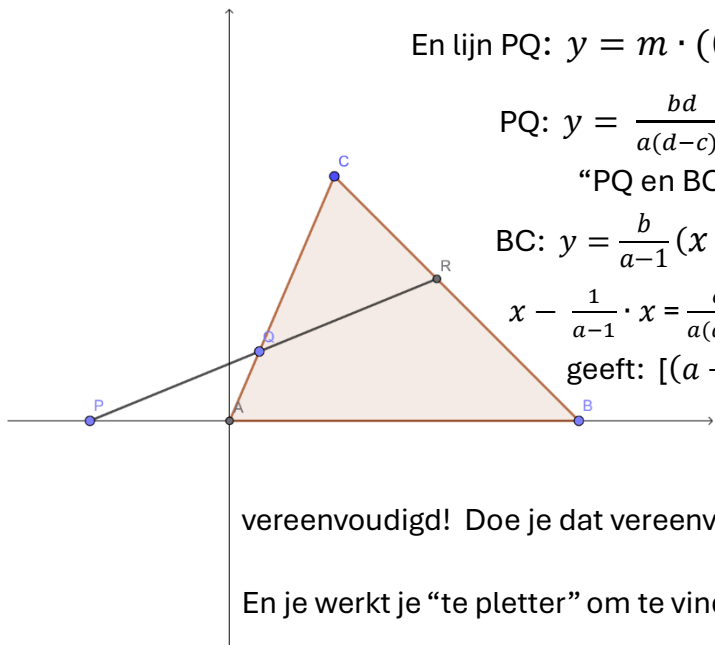
$$\text{vereenvoudigd! Doe je dat vereenvoudigen niet dan krijg je voor } y_R = \frac{b}{a-1} \cdot \left(\frac{(a-1)cd - a(d-c)}{(a-1)d - a(d-c)} - \frac{(a-1)d - a(d-c)}{(a-1)d - a(d-c)} \right)$$

$$\text{En je werkt je "te pletter" om te vinden: } y_R = \frac{bcd - bd}{c-d} \quad .$$

De coördinaten van R zijn : $(\frac{(a-1)cd - a(d-c)}{ac-d}, \frac{bcd - bd}{c-d})$.

en ook hier zou men nog verder kunnen vereenvoudigen... Het gaat echter om $BR^2 = (x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2$ met $B(1,0)$!

$$BR^2 = \left(\frac{(a-1)cd - (a-1)d}{ac-d} \right)^2 + \left(\frac{bcd - bd}{c-d} \right)^2 \quad \text{*waarbij } 1 = \frac{ac-d}{ac-d} \text{ is verwerkt.}$$



U en ik schrikken ervan dat als je niet meteen vereenvoudigt of gemeenschappelijke (tegengestelde) factoren weghaalt je veel te veel werk op de hals haalt! En ik moet U en mijzelf waarschuwen dat het hele Cartesische bewijs wel eens teveel energie kon gaan vergen. We kijken nog wel even verder naar CR en CQ en AQ...

$$CR^2 = (y_R - y_C)^2 + (x_R - x_C)^2 = \left(\frac{bcd-bd}{c-d} - b\right)^2 + \left(\frac{(a-1)cd-a(d-c)}{ac-d} - a\right)^2 \dots$$

Uiteraard ook hier vereenvoudigen: $\frac{(bcd-bc)^2}{(c-d)^2} + \left[\frac{(a-1)cd-a(d-c)}{ac-d} - a\frac{ac-d}{ac-d}\right]^2$

$$CR^2 = \frac{(bcd-bc)^2}{(c-d)^2} + \left[\frac{(a-1)cd-a(d-c)}{ac-d} - a\frac{ac-d}{ac-d}\right]^2 = \frac{(bcd-bc)^2}{(c-d)^2} + \frac{(acd-cd-ad+ac-a(ac)+ad)^2}{(ac-d)^2} = \frac{(bcd-bc)^2}{(c-d)^2} + \frac{(acd-cd+ac-a(ac))^2}{(ac-d)^2}$$

Nu nog (de kwadraten van) CQ en AQ :

met $Q(d, \frac{bd}{a})$ en $C(a,b)$ wordt $CQ^2 = (b - \frac{b-bd}{a})^2 + (a-d)^2$ en $AQ^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2}$

Verder is $AP^2 = c^2$ en $BP^2 = (c-1)^2$

Hiermee ontstaat de poging om te bewijzen dat: $AP^2 \cdot BR^2 \cdot CQ^2 = BP^2 \cdot CR^2 \cdot AQ^2$:

$$c^2 \cdot \left(\left(\frac{(a-1)cd-(a-1)d}{ac-d}\right)^2 + \left(\frac{bcd-bd}{c-d}\right)^2\right) \cdot \left(\left(b - \frac{b-bd}{a}\right)^2 + (a-d)^2\right) = (c-1)^2 \cdot \left(\frac{(bcd-bc)^2}{(c-d)^2} + \frac{(acd-cd+ac-a(ac))^2}{(ac-d)^2}\right) \cdot \frac{b^2 d^2}{a^2}$$

Wat er nog moet gebeuren is “gelijknamig maken” van de breuken en daarna links en rechts vermenigvuldigd met $(ac-d)^2$ en $(c-d)^2$ en a^2 . . . en je ziet de noemers verdwijnen.....

Daarna haakjes wegwerken en je krijgt links tientallen termen. . . . die -uiteindelijk- allemaal zullen wegvallen tegen de termen rechts.

Maar dit is buiten alle proporties! Het past allemaal niet meer op een regel..... Kijk nog eens naar de 3 regeltjes van het klassieke bewijs?

Wat bij het bewijs van de Stelling van Ceva wel lukte: gehaald vereenvoudigen/listig uitdelen. . . lukt nu niet. (misschien met A.I.?)

Stuur mij een mail en laat wat zien, als jij wel verder bent kunnen komen! Groeten uit Costa Teguisse , Lanzarote ton@ raves.nl