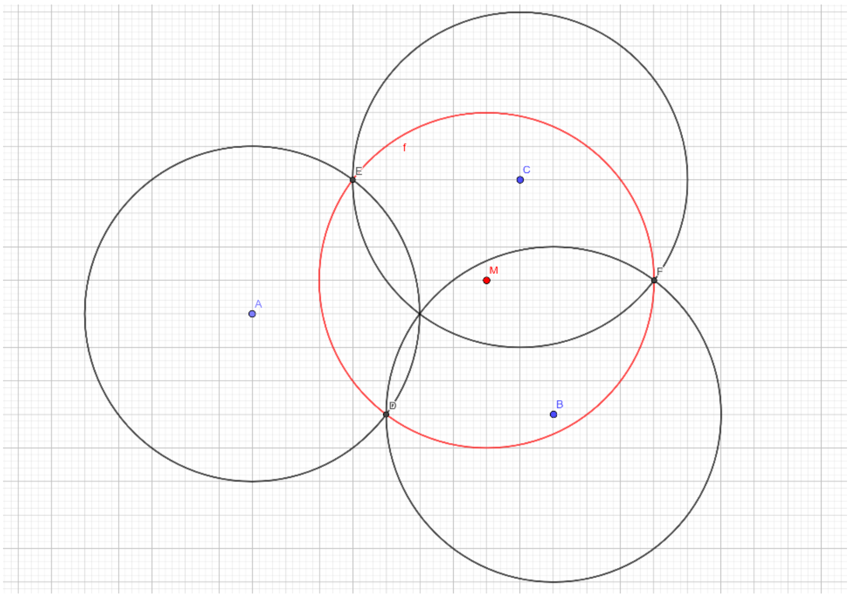
LUIDT:

Als drie cirkels elk met gelijke straal elkaar snijden in een punt dan zullen de overige snijpunten op een cirkel liggen met weer dezelfde straal. Zie de figuur hieronder:



Hierboven zie je drie cirkels met middelpunten A, B en C.
Ook zie je (rood) de cirkel met middelpunt M die door de overige snijpunten gaat.

Hieronder komt een "cartesisch bewijs" vol met inzichten!

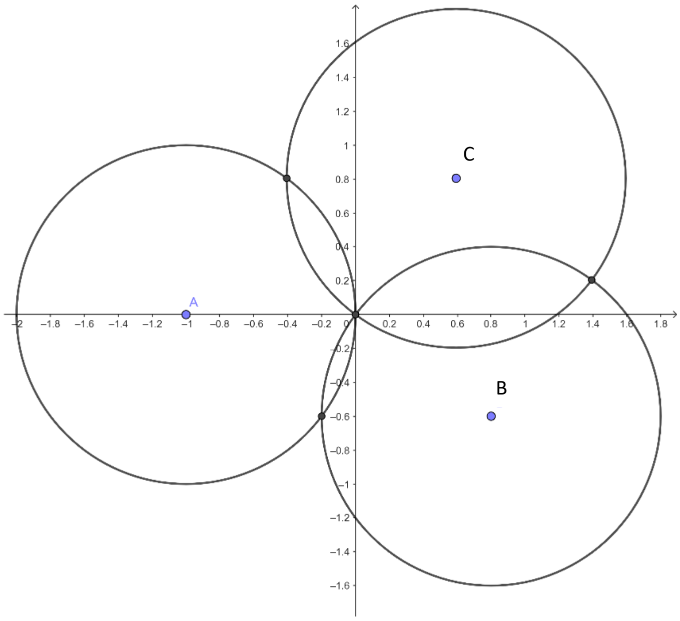
Zoals gewoonlijk kiezen wij een assenstelsel en nemen voor het gemeenschappelijke (snij-) punt de Oorsprong: O (0,0) .
Voorts verkleinen we de figuur zodat de straal van elke cirkel precies 1 is. Tenslotte draaien we de figuur zodat een van de cirkels zijn middelpunt (links) op de x-as heeft, namelijk: (—1,0).
Punt A ligt nu dus vast en voor punten B en C kiezen we de coördinaten:
C(a,b) en B(c,d) ... **(mag ook andersom maar met onbekende a, b, c en d)**
Dan zijn de vergelijkingen van de cirkels:

$$c_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$c_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$$

$$c_3: (x-c)^2 + (y-d)^2 = 1$$

Ga allereerst na dat de eerste cirkel middelpunt (—1,0) heeft en dat de andere vergelijkingen horen bij de andere twee cirkels.
Hierna komt een complete tekening met assenstelsel.
Het plaatje is gemaakt in Geogebra en toont duidelijk de snijpunten van de cirkels.



Maar zijn die ook cartesisch te bepalen (uit te drukken in a,b,c en d)?
Hoe haal je uit de vergelijkingen van (2) cirkels de snijpunten, waarvan je overigens al wel één oplossing weet, namelijk: $x = 0$ ...
Welnu door gewoon dapper te beginnen met de vergelijkingen zo eenvoudig mogelijk te schrijven: (met $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ wordt de eerste vergelijking ... afk.: "vgl.") :

$c_1 :\ x^2 + 2x + y^2 = 0$

$c_2 :\ x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$ **en merk op dat (Pythagoras):** $a^2 + b^2 = 1$

$c_3 :\ x^2 - 2cx + y^2 - 2dy = 0$ **en dat:** $c^2 + d^2 = 1$

Die kwadraten schrikken een beetje af, maar nu dapper doorgaan!
Haal de 2e vgl. van de 1e af: $2x + 2ax + 2by = 0$ **alles delen door 2:** $x + ax + by = 0$
... nu die x buiten haakjes halen en je ziet: $(1+a)x = -by$ ontstaan.
Onder de aanname dat $b \neq 0$ (*) krijg je dan : $y = \frac{(1+a)\cdot x}{-b}$

Dit gaan we invullen in c_1 en vinden dan: $x^2 + 2x + \frac{(1+a)^2}{b^2} \cdot x^2 = 0$
Het lijkt eventjes hopeloos, maar weet je nog dat één van de oplossingen was: $x = 0$?
Je kunt die x buiten haakjes halen en vindt: $x = 0$ **"of"** $x + 2 + \frac{(1+a)^2}{b^2} \cdot x = 0$

Bij het laatste gedeelte: $x + \frac{(1+a)^2}{b^2} \cdot x = -2$ **kun je "gelijknamig maken" en vindt:**
$\frac{b^2 + (1+a)^2}{b^2} \cdot x = -2$ **en** $x = \frac{-2b^2}{b^2 + (1+a)^2}$ **... het lijkt weer hopeloos, maar nu kom je (weer) de "Raves-methode" tegen : vereenvoudigen!**
TIP: laat dit NIET zo staan en ga NIET zo verder rekenen! Het kost je uren en uren en levert niets op, nou ja... een hoop frustratie! ... Kijk ALTIJD naar je tussenresultaat!

Kan het simpeler? Eenvoudiger?

Kijk eens naar de noemer: $b^2 + (1+a)^2$ dat is (uitgewerkt): $b^2 + 1 + 2a + a^2$
en weet je nog dat $a^2 + b^2 = 1.$ (?)

Nou HEEL goed opletten! $x = \frac{-2b^2}{b^2 + (1+a)^2} = \frac{-2b^2}{1+1+2a} = \frac{-2b^2}{2+2a} = \frac{-b^2}{1+a}.$

Nu weer reflecteren!! ... $a^2 + b^2 = 1$ dus $b^2 = 1 - a^2$

En daar komt De Truuk: $-b^2 = a^2 - 1$ ... maar $a^2 - 1 = (a+1) \cdot (a-1)$ ...

dus: $x = \frac{-b^2}{1+a} = \frac{(a+1)\cdot(a-1)}{a+1} = a - 1$

De x-coördinaat van het eerste snijpunt is dus gewoon: $a - 1$

En we hadden nog: $y = \frac{(1+a)\cdot x}{-b}$ ... en we gaan dat spelletje van vereenvoudigen nog eens uitschrijven: $y = \frac{(1+a)\cdot(a-1)}{-b} = \frac{a^2-1}{-b}.$

Maar uit $a^2 + b^2 = 1$ volgt onmiddellijk: $a^2 - 1 = -b^2$ en wat blijkt nu dus?

$$y = \frac{-b^2}{-b} = b$$

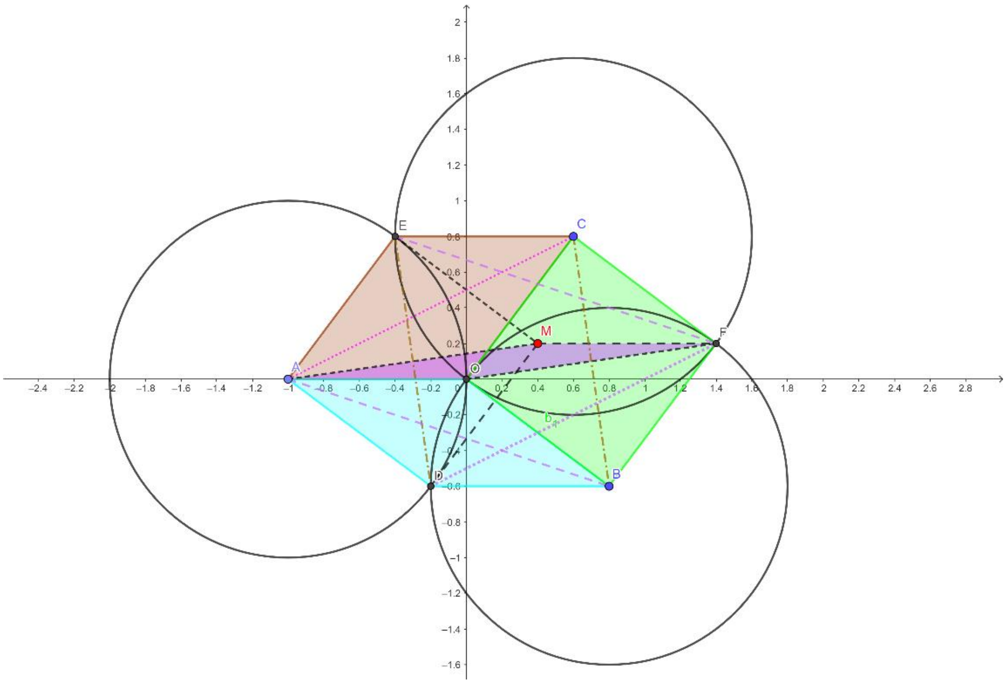
Het eerste snijpunt blijkt dus coördinaten te hebben: $(a-1, b)$ ... (hieronder E)

Toeval? Nee hoor, toeval bestaat niet!

Op eenzelfde wijze kun je narekenen dat de coördinaten van het 2e snijpunt (“links-onder”) zijn $(c-1, d)$ (hieronder D)

Is dat allemaal niet heel erg “toevallig”?

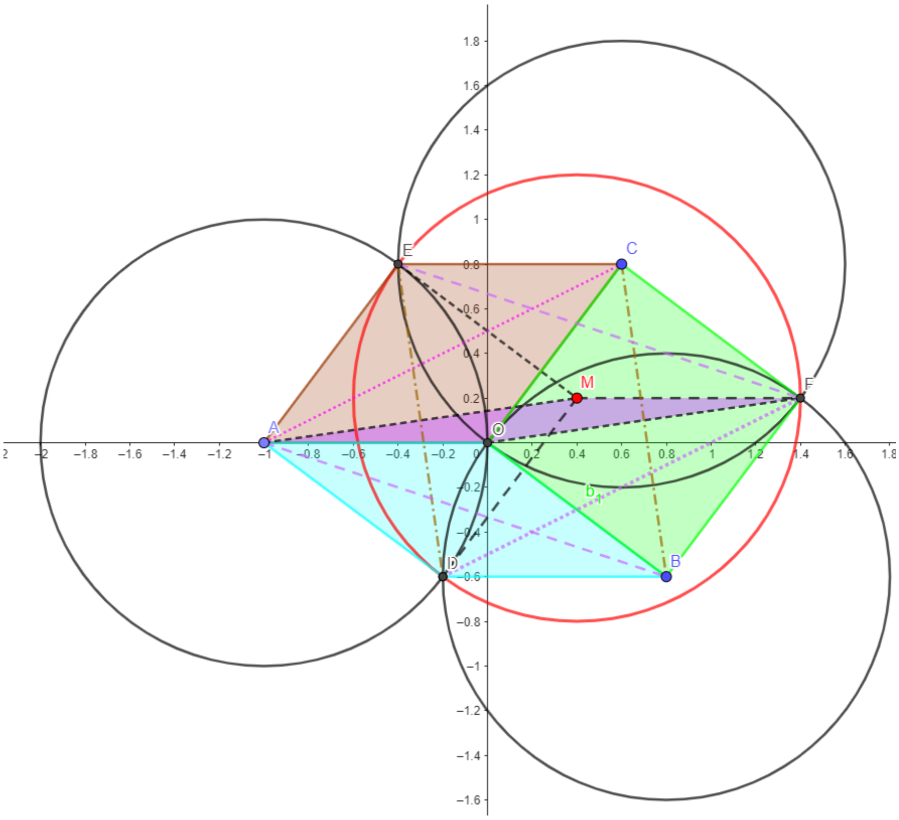
Nou... laten we nog eens (maar nu echt goed) kijken naar de figuur:



Zie je in de figuur dat de y-coördinaat van het eerste snijpunt (E) dezelfde is als de y-coördinaat van het middelpunt van de 2e cirkel?
En dat de y-coördinaat van het tweede snijpunt (D) dezelfde is als de y-coördinaat van het middelpunt van de 3e cirkel?

Dat komt omdat er een “ruit” zichtbaar is! (Oeps hadden wij helemaal niet op gelet!)
Meer dan één zelfs en heel veel parallellogrammen!

Nu dat wij die ruiten zien is ons duidelijk dat we het derde snijpunt kunnen maken door (in de groene ruit) coördinaten van het midden van het lijnstuk tussen (a, b) en (c, d) te verdubbelen! Dat wordt dus punt $F\ (a + c\ ,\ \ b + d)$
Dat kun je ook narekenen door vgl'n (2) en (3) te combineren... Ikzelf was daar uren en uren mee bezig! Wat een gedoe om al je schrijffouten en rekenfouten te corrigeren in uitdrukkingen zoals :
$x = \frac{(2ad-2bc)\cdot(d-b)}{(d-b)^2 + (a-c)^2}$ en dat invullen in: $y = \frac{a-c}{d-b} \cdot x$ geeft .... hemeltjelief!
Wat een hel is dat! NIET DOEN!!!



Er is nog een vierde vierhoek te bespeuren en die brengt je op het idee dat het gezochte middelpunt van die vierde cirkel zou kunnen zijn: M$(a + c - 1,\ \ b + d)$.
INZICHT!
Je mag het ook gewoon narekenen (**) gebruikmakend van de truukjes zoals beschreven, maar.... je rekent je echt een breuk!
Ons brengt het de (rode) cirkel met vgl.: $(x - a - c + 1)^2 + \ (y - b - d)^2 = 1$
Aan jou de vraag of je alle coördinaten van die "overige snijpunten even" wilt invullen om te controleren of de genoemde punten inderdaad op die vierde cirkel liggen ! ?
Bij mij klopte het allemaal als een bus en ik heb nog een toegift:
Als het 3 cirkels met straal r betreft dan wordt de vgl van die 4^e :cirkel:

$$(x - x_{c_1} - x_{c_2} - x_{c_3})^2 + \ (y - y_{c_1} - y_{c_2} - y_{c_3})^2 = \ r^2$$

met $c_1\ :\ (x - \ x_{c_1})^2 + \ (y - y_{c_1})^2 = \ r^2$ met middelpunt: $M_1(x_{c_1}, y_{c_1})$;
$c_2\ :\ (x - \ x_{c_2})^2 + \ (y - y_{c_2})^2 = \ r^2$ met middelpunt: $M_2(x_{c_2}, y_{c_2})$ etc.
Toeval?

Oh ja, als $b = 0$ geldt (*) dan hebben we twee rakende cirkels en een triviaal geval!

Elders op deze website wordt bewezen dat de 3 middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan en wel het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die driehoek.

Je mag het (**) proberen door bijv. het midden van twee snijpunten (niet O(0,0) ..)
te bepalen bijv. dat van ED: $\left(\frac{1}{2}x_E + \frac{1}{2}x_D, \frac{1}{2}y_E + \frac{1}{2}y_D\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - 1\ ,\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d\right)$ **en**
de loodlijn te maken met richtingscoëfficiënt: $\frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{d-b}{c-a}$ **...**
De vgl. van die middelloodlijn moet je combineren met die van een tweede middelloodlijn.
Zucht! Ik heb dat gedaan en was dagen bezig (vooral met het corrigeren van schrijffoutjes).
Tot ik op blz. 19 na veel vereenvoudigingen en truukjes vond: M$(a + c - 1,\ b + d)$
Op het internet las ik een berichtje dat dit punt een "hoogtepunt" was ... FOUTJE!
We gaan het eens over inzicht hebben en…. VECTOREN !
Wat direct opvalt is dat de vectoren $\overrightarrow{DE}\ en\ \overrightarrow{BC}$ **gelijk zijn, namelijk:** $\begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$
Ook: $\overrightarrow{AC}\ en\ \overrightarrow{DF}$ **en bijvoorbeeld:** $\overrightarrow{AD}\ en\ \overrightarrow{CF}$ **schrijf maar uit en reken maar na!**
Je ziet ineens veel parallellogrammen! ... zoals ACFD en BCED en ABFE en AOFM.
Kijk nu eens naar die laatste! Ga je vanuit de Oorsprong 1 (straal) naar links dan kom je uit in A. Doe je hetzelfde vanuit F dan kom je uit in M$(a + c - 1,\ b + d)$ **...**
en geef toe dat dit veel vlotter gaat dan vgl.-en van middelloodlijnen combineren!

De manier van Descartes is duidelijk frustrerend voor gewone stervelingen als ik,
nota bene geboren op de Cartesiusweg (in Utrecht...)

Met behulp van vectoren zie je ook dat de driehoeken gevormd door de middelpunten en die door de tweede snijpunten precies even groot zijn ("congruent") !
Hier zijn dat driehoeken ABC en FDE. (let op de volgorde!) ΔDEF **is even groot als** ΔABC**.**
Zo is bijv. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c-1 \\ d \end{pmatrix}$
Er staat op de website een animatie waarin je de cirkels en de driehoeken kunt zien en ook ziet veranderen als je een middelpunt "versleept".

Op de "Vervolgpagina" van "www.raves.nl" staat beschreven wat er nog (wel) geldt als de cirkels NIET dezelfde straal hebben. Kijk gerust eens rond op die website.
Ik moet eerlijk toegeven dat deze website NIET geschikt is voor leerlingen van MAVO en "lager" ... Ook Kader-Mavo-leerlingen krijgen de basiswiskunde, die hiervoor nodig is ... gewoon NIET.
Dit relaas is getypt op Scala Curio Teteringen (een school voor Mavo ... en lager) in 2024.
De leerlingen hier raad ik aan eens naar de Stelling van Raves te kijken! Dat gaat over hoogtelijnen en een "hoogtepunt" en ik raad een zekere Tycho daar ook eens naar te kijken! (... zijn "bewijs" op basis van een kubus in een plat vlak "rammelt" een beetje).

Ton Raves
ton@raves.nl