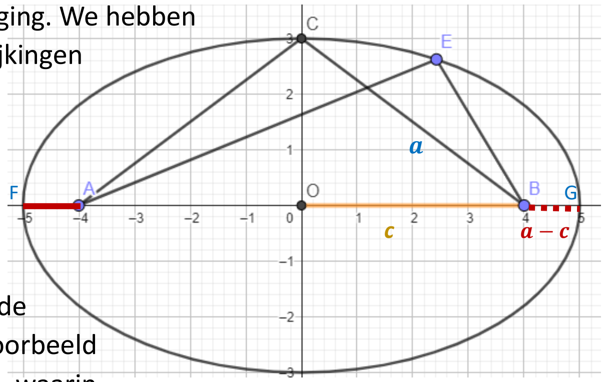
Hyperbolen.

Wat zijn dat voor bijzondere **kegelsneden**?

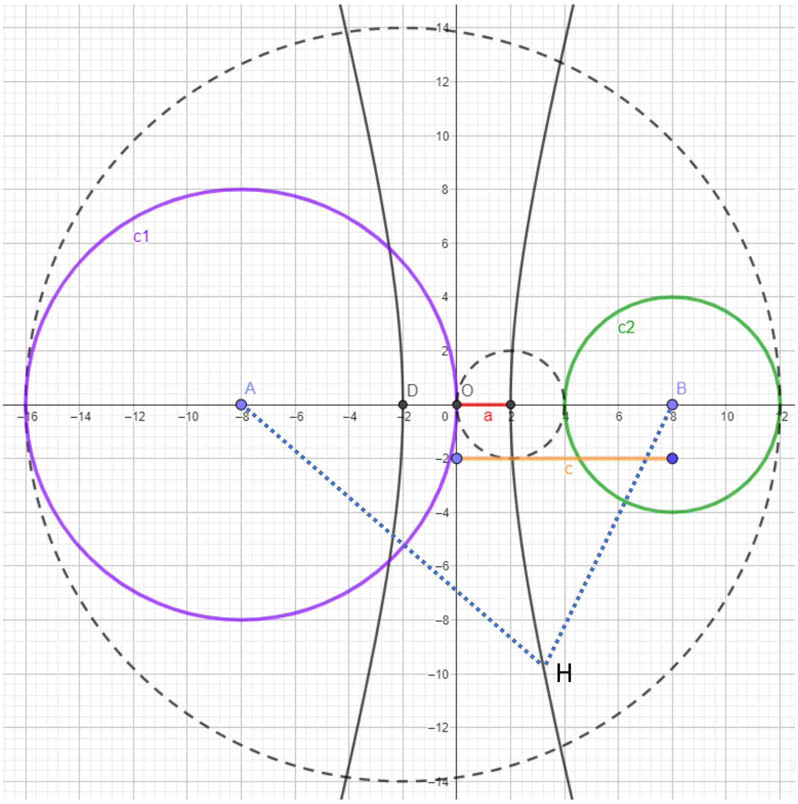
Onder kegelsneden wordt verstaan: ellipsen, cirkels, parabolen en lijnen die je krijgt als je een “kegel” snijdt met een vlak met een bepaalde (schuine) ligging. We hebben al eens kennis gemaakt met **ellipsen** en hun vergelijkingen die -als je het assenstelsel slim kiest- kunt schrijven in de vorm: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en met eigenschappen: dat de lengte van de horizontale as bedraagt: $\boldsymbol{2a}$ (Hier: $2\cdot 5=10$ **a.h.w. de lengte (*) van een touwtje van helemaal links tot helemaal rechts : FG** en deze is ook gelijk aan: AC + BC ... en de lengte van de verticale as bedraagt: $2b$ en in het voorbeeld hiernaast: ($2\cdot 3=6$) verder geldt: $a^2 = b^2 + c^2$ waarin c de afstand is van de oorsprong tot een brandpunt.



Of: $\boldsymbol{b^2=a^2-c^2}$. Dat dit **(*)** klopt zie je door het verschil van het buitenste punt bij $x=a$ (punt G) tot brandpunt (B) (heen-en-terug)bij $x=c$ mee te rekenen in de optelling van A tot O: c plus... van O tot B... (+c) plus twee keer dat verschil: $2\cdot(\boldsymbol{a-c})$ opgeteld (“heen-en-terug”): $\boldsymbol{2a}$.

Het is werkelijk leuk om eens te experimenteren met een touwtje (lengte $\boldsymbol{2a}$) dat punten oplevert op een ellips zoals C, E, F en G. Je leest er meer over in het **VERMOEDEN VAN RAVES** (en ziet het vooral bij de video!)

Hieronder zie je een figuur met een **hyperbool.**



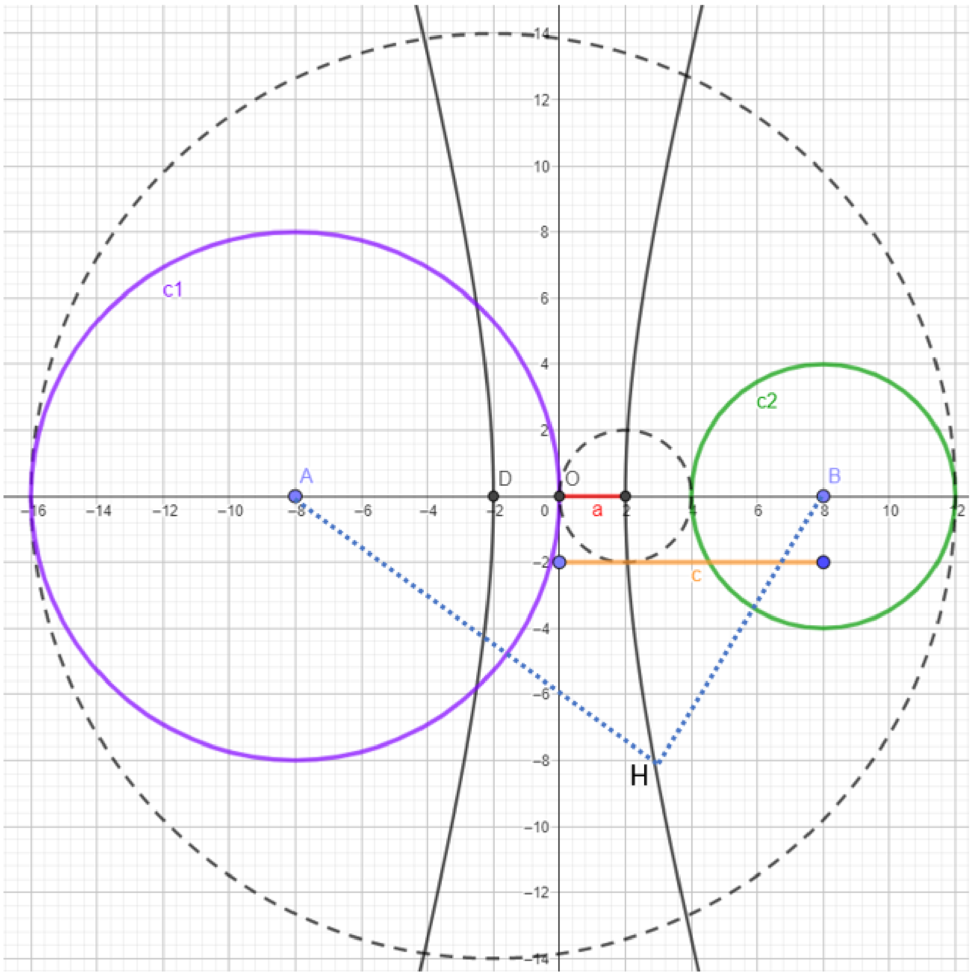
De vergelijking ervan is: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

Er is nu geen lange as. De takken van de hyperbool snijden de horizontale as op een afstand $\boldsymbol{a}$ ... de brandpuntsafstand is $\boldsymbol{c}$ en nu geldt: $b^2 = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2$ (“andersom als bij een ellips”) ...

Bij een **ellips** is de **SOM** van de afstanden van een punt op de ellips E tot de brandpunten (dus opgeteld) constant $\boldsymbol{2a}$ **.** In de bovenste figuur geldt: AE + BE = $\boldsymbol{2a}$**.**

Bij een hyperbool is het verschil constant zoals in : HA – HB = $\boldsymbol{2a}$

hierna wordt de figuur herhaald:



Net als bij de introductie van een ellips wordt aangevangen met twee "richtcirkels".
Hierboven zie je die met middelpunt A en deze grote cirkel (c_1) heeft straal R ;
verder is er rond B een cirkel (c_2) met straal r .
Een **hyperbool** is nu een verzameling punten waarbij de **afstand van zo'n punt H tot de (beide) richtcirkels gelijk is**. Zo'n punt is dus een middelpunt van een cirkel die beide richtcirkels raakt!
Hierbij is het assenstelsel "slim" gekozen precies in het midden van de middelpunten (de genoemde "brandpunten"), A en B ...
Je ziet in de figuur een klein cirkeltje dat als middelpunt precies (a,0) heeft en dit cirkeltje raakt aan beide richtcirkels. Precies gespiegeld aan de linkerkant zie je het middelpunt (op de linkertak) van een grote cirkel die "omhullend" aan beide cirkels raakt.

Bij een ellips kun je zien dat $2a$ precies de waarde is van $R + \mathbf{r}.$
Bij een hyperbool is dit HET VERSCHIL: $2a$ = $R - \mathbf{r}$ ... (als dit positief is, of "andersom").
Nu je weet wat een ellips is en wat een hyperbool is kun je eens naar het **VERMOEDEN VAN RAVES** kijken.
Als je het echt mooi wilt doen download dan het (gratis) programma **GEOGEBRA** (wel uitkijken dat je geen overbodige (en ongewenste) extra progjes download), dan kun je zelf allerlei mooie figuren maken met cirkels, ellipsen en hyperbolen.
Het meest opmerkelijke is dat er een **parabool** verschijnt als de straal van de kleine cirkel $\mathbf{r}$ naar nul gaat EN de straal van de grote cirkel almaar toeneemt. Links heb je dan geen richtcirkel meer maar een "**richtlijn**"... rechts **een brandpunt** . Experimenteer naar hartenlust!
Als je in GEOGEBRA experimenteert dan zie je ook wat de kegelsnede wordt in het geval: $R = \mathbf{r}$

Valkenisse mei 2023