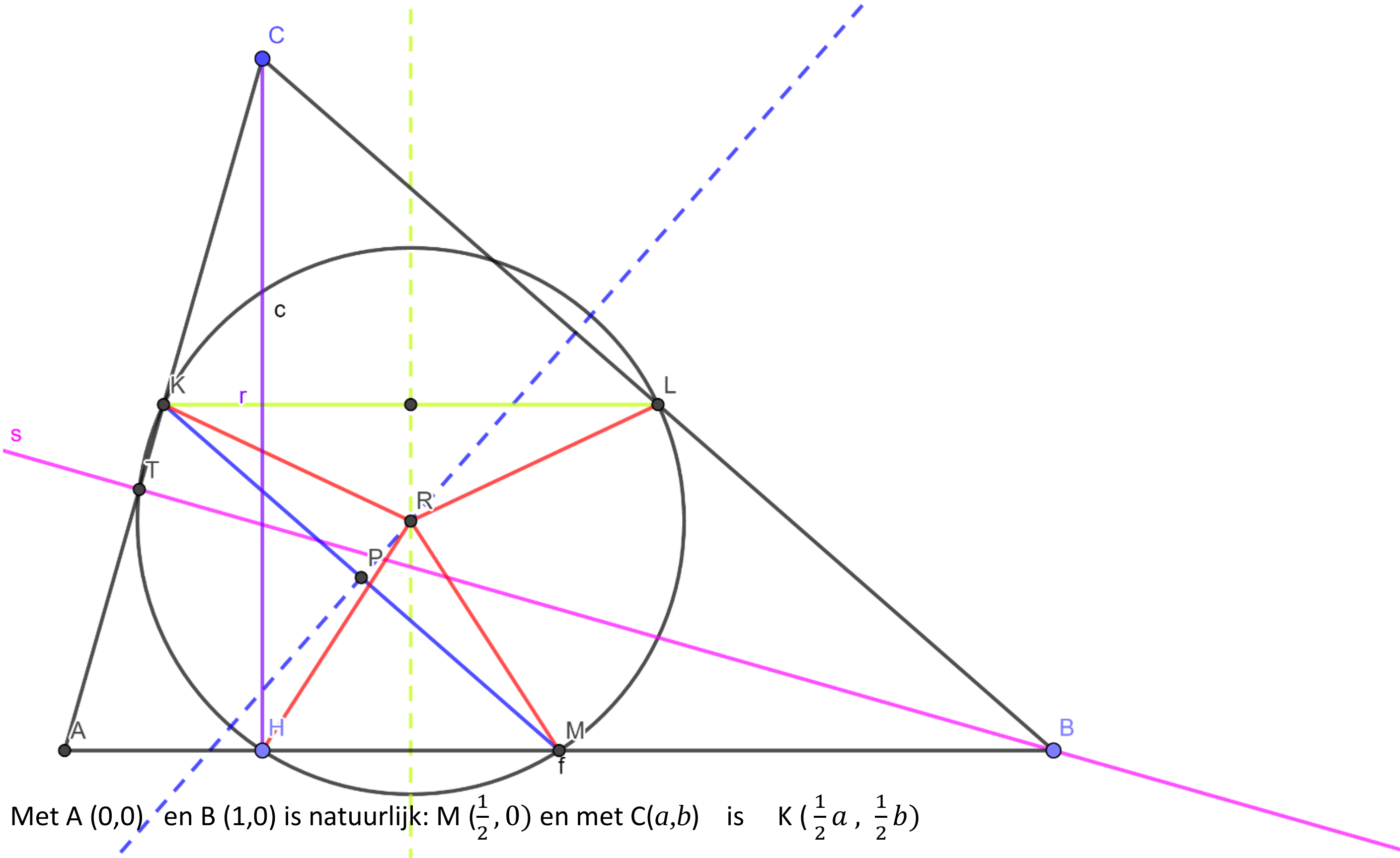
De (negen-punts-) Stelling van Feuerbach . . . www.raves.nl

… Luidt: .. de voetpunten van de hoogtelijnen en zwaartelijnen van een willekeurige driek liggen op één cirkel en op die cirkel liggen ook de middens van de hoogtelijnstukken (van hoekpunt tot hoogtepunt). Deze figuur vormt het begin van het **cartesisch** bewijs van de Stelling van Feuerbach.

De coördinaten van de hoekpunten van driehoek ABC zijn:
A(0,0); B(1,0) en C(a,b). (zoals gewoonlijk en met $a \neq 0 \quad en\ b \neq 0$)

Er moeten volgens dhr. Feuerbach negen punten op één cirkel een (unieke) plaats vinden.
Eerste vraag is dus: welke cirkel? We starten met de middens van de zijden:
K; L en M op resp. AC; AB en BC. (de voetpunten van de zwaartelijnen…)
De cirkel in kwestie is daardoor op unieke wijze vastgelegd! En wel door de middelloodlijnen van KL; KM (en LM)



Met A (0,0) en B (1,0) is natuurlijk: M ($\frac{1}{2}$, 0) en met C(a,b) is K ($\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$)

We gaan nu de middelloodlijnen van KL en die van KM snijden…..

Om met die laatste te beginnen herinneren we de lezer er aan dat de coördinaten van het midden van een lijnstuk een kwestie is van het gemiddelde nemen van de x-coördinaten en dat van de y-coördinaten…daarmee wordt het midden van KM: punt P ($\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}b$)

De richtingscoëfficiënt van KM is de deling van het verschil in y-coördinaten van K en M door het verschil van die der x-coördinaten: $rc_{KM} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a-1}$ en dit is ook die van BC: KM // BC.

Op het **speciale geval (*) dat $\boldsymbol{a = 1}$** bedraagt en lijn KM verticaal loopt komen we later apart terug…

De vgl. van de middelloodlijn van KM is dan $y - y_P = m \cdot (x - x_P)$ met $m = \frac{1-a}{b}$
immers dan is het product der richtingscoëfficiënten: $rc_{KM} \cdot m = -1$ en krijgen we de vgl. :
k: $\boldsymbol{y - \frac{1}{4}b = \frac{1-a}{b} \cdot (x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4})}$ in de tekening: de blauwe streepjeslijn

KL // AB (horizontaal) en heeft vgl.: $y = \frac{1}{2}b$ en het midden van KL is: $Q(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}b)$

De vgl. van de (verticale *) middelloodlijn van KL is dan $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$, immers we hadden

K$(\frac{1}{2}a\,,\ \frac{1}{2}b)$ en L $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}b)$
Nu gaan we de vgl'n. van k: $y - \frac{1}{4}b = \frac{1-a}{b} \cdot (x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4})$ en $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$ combineren:

En vinden $y - \frac{1}{4}b = \frac{1-a}{b} \cdot (\frac{1}{4}a) = \frac{1-a}{4b} \cdot a = \frac{a-a^2}{4b} \Leftrightarrow y = \frac{a-a^2}{4b} + \frac{1}{4}b = \frac{a-a^2}{4b} + \frac{b^2}{4b} = \frac{a-a^2+b^2}{4b}$

Hiermee ligt het middelpunt van de cirkel vast : **R$\boldsymbol{(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}, \frac{a-a^2+b^2}{4b})}$**

De afstand r tussen R en M is volgens Pythagoras: $r^2 = (\frac{1}{2}a + \frac{1}{4} - \frac{1}{2})^2 + (\frac{a-a^2+b^2}{4b})^2$

En de vgl. van de cirkel is: $\boldsymbol{(x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{a-a^2+b^2}{4b})^2 = (\frac{1}{2}a - \frac{1}{4})^2 + (\frac{a-a^2+b^2}{4b})^2}$

> **Opmerking**: Hadden we het midden van LM genomen en de middelloodlijn van LM gebruikt dan kwam er hetzelfde snijpunt uit; kijk maar:
>
> Het midden van LM is: $(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}b)$ en de middelloodlijn: $y - \frac{1}{4}b = \frac{-a}{b} \cdot (x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2})$
> Deze staat loodrecht op LM en ook op AC (LM // AC) en $rc_{AC} = \frac{b}{a}$
>
> Bij het combineren ("gelijkstellen") van die vgl'n. vallen de stukken : $y - \frac{1}{4}b$ weg en houd je over: (na vermenigvuldigen met b:) $(1-a) \cdot (x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}) = -a \cdot (x - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2})$
> Het is leuk om hier eens de haakjes weg te werken en te zien wat er allemaal wegvalt!......

Als eerste controle gaan we zien of het voetpunt van de hoogtelijn uit C : punt H (a , 0) netjes voldoet aan de vgl. van de cirkel: links krijgen we: $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2$ … tja: $a - \frac{1}{2}a = \cdots$
De rode lijnstukken RH en RM zoals je ook in de tekening ziet blijken even lang.

Wat ook blijkt is: ("K ingevuld") $\frac{1}{16} + (\boldsymbol{\frac{1}{2}b - \frac{a-a^2+b^2}{4b}})^2 = (\boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}})^2 + (\boldsymbol{\frac{a-a^2+b^2}{4b}})^2$
(… precies hetzelfde krijg je als je de coördinaten van L invult)….

Uit pure nieuwsgierigheid vereenvoudigen we $\boldsymbol{\frac{1}{2}b - \frac{a-a^2+b^2}{4b}}$ tot $\boldsymbol{\frac{2b^2}{4b} - \frac{a-a^2+b^2}{4b} = \frac{a^2+b^2-a}{4b}}$

… om te zien of: ("links") $\frac{1}{16} + (\boldsymbol{\frac{a^2+b^2-a}{4b}})^2$ gelijk is aan: $(\boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}})^2 + (\boldsymbol{\frac{a-a^2+b^2}{4b}})^2$ ("rechts")

Vermenigvuldigen we links en rechts met $16b^2$ dan zien we ("links":) $b^2 + (a^2+b^2-a)^2$ en dat is uit te schrijven tot: $b^2 + a^4 + b^4 + a^2 + 2a^2b^2 - 2a^3 - 2ab^2$

rechts krijgen we: $16b^2 \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{16}\right) \quad + \quad 16b^2 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{a - a^2 + b^2}}{\boldsymbol{4b}}\right)^{\boldsymbol{2}} \quad =$

$$4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 \quad + \quad (\boldsymbol{a - a^2 + b^2})^2 \quad =$$

$$4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 \quad + a^2 + a^4 + b^4 + 2\,ab^2 - 2a^2b^2 - 2a^3 =$$

$$: \quad b^2 + a^2 + b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - 2a^3 - 2ab^2$$

Alles klopt als een bus!

De cirkel C met vgl.

$$\boxed{(\boldsymbol{x} - \tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a} - \tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}})^2 + (\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{a - a^2 + b^2}}{\boldsymbol{4b}})^2 = (\tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a} - \tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}})^2 + (\frac{\boldsymbol{a - a^2 + b^2}}{\boldsymbol{4b}})^2}$$

is de gewraakte cirkel die door de zes voetpunten van zwaartelijnen en hoogtelijnen gaat!

De vier punten K, L, M en H (zie tekening) hebben we al geverifieerd.

We beginnen nu aan een tweede voetpunt: T van de (tweede) hoogtelijn vanuit B loodrecht op AC.

De (in de tekening roze) hoogtelijn vanuit B loodrecht op AC is die met = $rc_s = \frac{-a}{b}$

(weer onder voorwaarde dat $b \neq 0$; hiervoor zag je al dat $rc_{AC} = \frac{b}{a}$)

De vgl. van de hoogtelijn is dus $y - y_B = \frac{-a}{b} \cdot (x - x_B)$ en dat wordt simpel $\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{y = \frac{-a}{b} \cdot (x - 1)}$

Dit combineren met AC: $\boldsymbol{y = \frac{b}{a} \cdot x}$ geeft $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \cdot x = \frac{a}{b} \iff \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot x = \frac{a}{b}$ dus: $x = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

Hieruit volgen de coördinaten van T:($\frac{a^2}{a^2+b^2}$, $\frac{ab}{a^2+b^2}$)

Nu gaan we die invullen in de vgl. van C

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{a - a^2 + b^2}{4b}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{a^2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{16}} - \frac{a^3}{a^2+b^2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{\frac{1}{2}a \cdot (a - a^2 + b^2)}{a^2+b^2} + \left(\frac{\boldsymbol{a - a^2 + b^2}}{\boldsymbol{4b}}\right)^2$$

De laatste (groene) term valt weg tegen de laatste term aan de rechterkant van de cirkelvgl.

Met: $(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}})^2 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{a^2} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{16}}$ (aan de rechterkant) krijgen we de vgl:

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a} - \frac{a^3}{a^2+b^2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{\frac{1}{2}a \cdot (a - a^2 + b^2)}{a^2+b^2} = 0$$

Nu gaan we de eerste en de vierde term “bij elkaar zetten”; de factor $\boldsymbol{a^2}$ buitenhaakjes halen….

$$\frac{\boldsymbol{a^2} \cdot a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{1}{2}a - \frac{a^3}{a^2+b^2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2+b^2} + \frac{\boldsymbol{a^2}b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{\frac{1}{2}a \cdot (a - a^2 + b^2)}{a^2+b^2} = 0$$

en vinden: $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{2}a - \frac{a^3}{a^2+b^2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2+b^2} - \frac{\frac{1}{2}a \cdot (a - a^2 + b^2)}{a^2+b^2} = 0$

Nu vermenigvuldigen we alles met $a^2 + b^2$ en raken de noemers kwijt:

$$a^2 + \frac{1}{2}a \cdot (a^2 + b^2) - a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a \cdot (a - a^2 + b^2) = 0$$

als laatste nog even de haakjes wegwerken:

$$a^2+\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}ab^2-a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}ab^2=0$$

Het klopt als een bus!

Het voetpunt van de derde hoogtelijn zal ook braaf moeten voldoen; is eigenlijk “méér van hetzelfde”…, maar voordat we die gaan “maken” eerst eens naar Het Hoogtepunt van de driehoek (het snijpunt der hoogtelijnen) kijken….

Allereerst hebben we al eens bewezen (kijk in de indexlijst van www.raves.nl) dat de drie hoogtelijnen van een driehoek door precies één punt gaan. We hoeven dus slechts de eerste twee hoogtelijnen te snijden!

De Stelling van Feuerbach gaat er (verder) ook over dat de middens van de hoogtelijnstukken (van hoekpunt tot hoogtepunt) óók op de cirkel liggen!! En alweer zijn we nieuwsgierig naar dat hoogtepunt en het eerste “midden van een hoogtelijnstuk”…. Zou het mooi uitkomen?
De eerste hoogtelijn had vgl: $\boldsymbol{x = a}$ en de tweede: $\boldsymbol{y = \frac{-a}{b}\cdot(x-1)}$ dus “ons”

hoogtepunt heeft coördinaten: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\frac{-a}{b}\cdot(a-1)})$ of iets netter: $\left(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{\frac{a-a^2}{b}}\right)$

Punt C had coördinaten C(a,b)

dus het “eerste” midden is $\left(\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a-a^2}{b}+b\right)}\right)$ of iets netter:

$\left(a\,, \frac{a-a^2+b^2}{2b}\right)$ en hiervan komt de teller in de y-coördinaat bekend voor!

We gaan die coördinaten eens invullen in:

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2=\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2}$$ en krijgen:

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{a-a^2+b^2}{2b}-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2=\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2}$$

en er valt meteen wat weg!
En kijk eens naar die breuken! . .de eerste is het dubbele van de tweede die er van af moet….

Tja, dat komt inderdaad mooi uit! En zelfs zonder te kijken naar de vgl. van de tweede hoogtelijn kunnen we het midden van dat “tweede stuk” gewoon met “middelen” vinden: :
$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\,, \frac{a-a^2}{2b}\right)}$ en wat gebeurt er bij het invullen in de vgl. van c…?

links: $\frac{1}{16}+\boldsymbol{\left(\frac{a-a^2}{2b}-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2}=\frac{1}{16}+\boldsymbol{\left(\frac{a-a^2}{2b}-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2}=$

$\frac{1}{16}+\left(\frac{2a-2a^2}{4b}-\frac{a-a^2+b^2}{4b}\right)^2=\frac{1}{16}+\left(\frac{a-a^2-b^2}{4b}\right)^2=\frac{1}{16}+\boldsymbol{\left(\frac{a^2+b^2-a}{4b}\right)^2}$ en dit is precies wat we al eerder zagen . . . . onderaan pagina 2! Het klopt al weer!

Het checken bij het midden van het “derde hoogtelijnstuk” is bijna triviaal!

Het midden van A(0,0) en het hoogtepunt $(\boldsymbol{a}\,, \frac{\boldsymbol{a-a^2}}{\boldsymbol{b}})$ is: $(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a}\,, \frac{\boldsymbol{a-a^2}}{\boldsymbol{2b}})$ en als je invult in in de vgl. van $\mathcal{C}$ krijg je weer: $\frac{1}{16}+(\frac{a^2+b^2-a}{4b})^2$

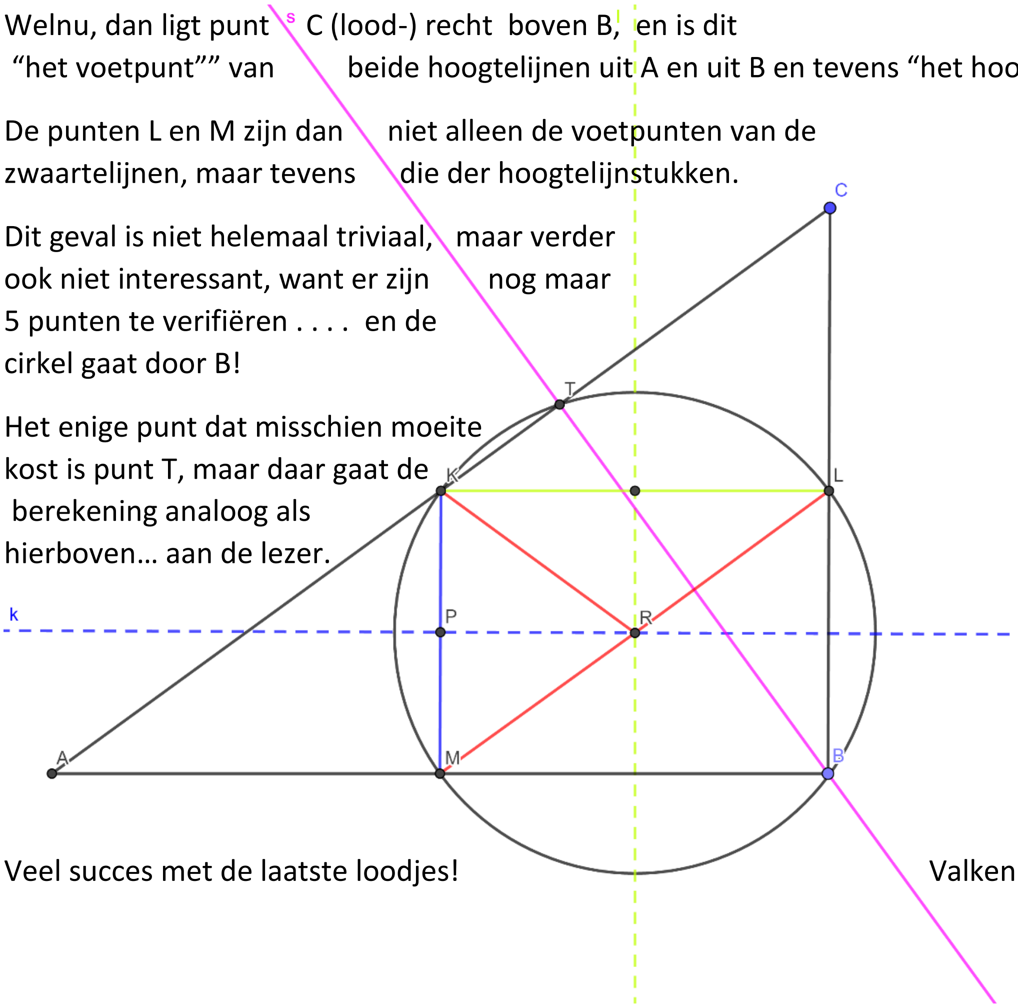
Het voetpunt van de derde hoogtelijn is het enige punt dat nog gecheckt moet worden. Maar de leerlingen van **mijn** VWO-wiskunde-B lesgroepen begrijpen **de uitdaging** al….

Stel een vgl. op van die derde hoogtelijn en bepaal de coördinaten van het voetpunt S … (Je ziet dit punt in de tekening -op de cirkel- tussen C en L)….

Pas op! Dit is nu net het lastigste deel van het bewijs! Hier komt een-en-ander niet echt “mooi uit”… en alleen met stug doorrekenen kom je er!

Aan al mijn collega’s **wiskunde-docenten**: **UITDAGING**!?…. **Kunt U** gewoon met pen en papier **het bewijs afmaken?** Alles geheel in de trant van **cartesische bewijzen** dus echt met algebra…vergelijkingen van lijnen en het bepalen van snijpunten….. zoals in het verhaal hierboven? Niet alles komt in eerste instantie “mooi uit” maar na wat slim vereenvoudigen lukt het en krijg je een Eureka-gevoel zoals bij een SUDOKU (“heavy”) . . . . (gelukt binnen één uurtje?...)

Voor de volledigheid moeten we nog wel verifiëren wat er aan de hand (“loos”) is als de uitzonderingssituatie zich voordoet met: **(*)** $\boldsymbol{a = 1}$



Welnu, dan ligt punt C (lood-) recht boven B, en is dit “het voetpunt”” van beide hoogtelijnen uit A en uit B en tevens “het hoogtepunt”…

De punten L en M zijn dan niet alleen de voetpunten van de zwaartelijnen, maar tevens die der hoogtelijnstukken.

Dit geval is niet helemaal triviaal, maar verder ook niet interessant, want er zijn nog maar 5 punten te verifiëren . . . . en de cirkel gaat door B!

Het enige punt dat misschien moeite kost is punt T, maar daar gaat de berekening analoog als hierboven… aan de lezer.

Veel succes met de laatste loodjes! Valkenisse 2019