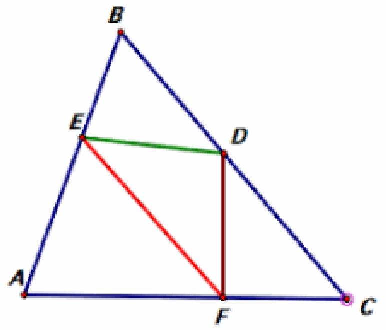
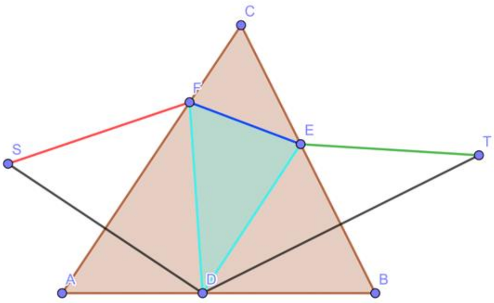
Het probleem van Fagnano

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC.
Zoek een ingeschreven driehoek DEF
met de kleinst mogelijke omtrek.
Dit probleem werd in 1775 gesteld door de Italiaanse wiskundige J.F. Fagnano.
Hij beweerde dat de punten D, E en F de voetpunten waren van de hoogtelijnen van driehoek ABC.

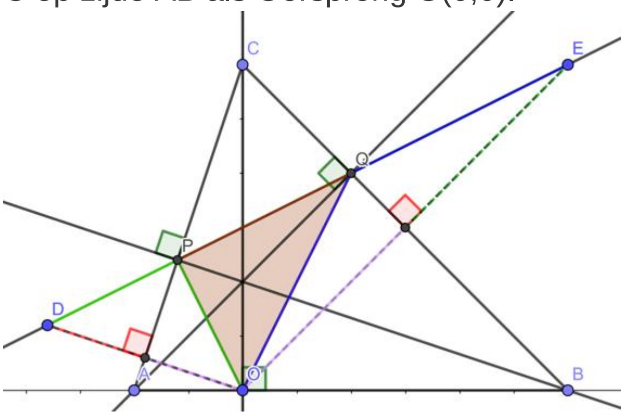


Een cartesisch bewijs is ook hier lastig want ...
... hoe krijg je de optelling van 3 lijnstukken minimaal?

In de literatuur vond ik meetkundige bewijzen van de vorm dat als je punt F spiegelt in de zijden (resp.) AB en BC ... je dan punten krijgt: S en T,
waarbij EF = SE en FD = TD
De omtrek van driehoek DEF is dan de optelling van de lijnstukken SE + ED + DT en (daar komt het weer:) de kortste afstand tussen 4 punten vindt plaats als deze punten op één lijn liggen.
Zie volgende figuur:



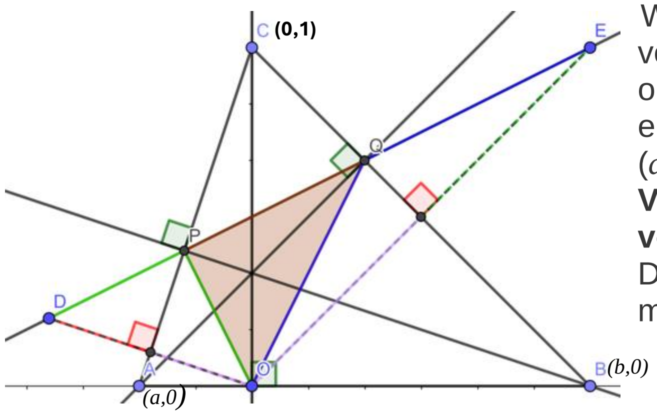
Excuses voor het noemen van de letters **anders** dan zoals hierboven,
maar het idee is duidelijk!
SE +FE + ET moet minimaal worden...
Experimenteer eens bij
https://www.geogebra.org/classic/kzg3ryde
In de bewijsleer stelt men dan dat CS en CD en CT gelijk zijn ... (klopt vanwege de gelijkbenige driehoeken, die ontstaan bij spiegelingen) en MINIMAAL ZIJN als punt D op de kortste afstand ligt van C t.o.v. AB... (het “voetpunt” van de hoogtelijn vanuit C op zijde AB).
Vervolgens lees je dan dat zoiets (simultaan) ook geldt voor E en F.... voetpunten van hoogtelijnen!!! En je voelt wel (intuïtief) aan dat het klopt, maar je wilt nu eens een sluitend bewijs! Kan dat wel “cartesisch”? Jazeker wel, maar het vergt veel doorzettingsvermogen en accuratesse! Hier moeten we uiterst zorgvuldig en slim ons assenstelsel kiezen! Welnu: neem het voetpunt van de hoogtelijn uit C op zijde AB als Oorsprong **O**(0,0).



We gaan dit voetpunt **O** (weer) spiegelen in de zijden AC en BC.

ALS nu blijkt dat de punten D, P, Q en E op één lijn liggen dan zijn de voetpunten O; P en Q inderdaad de gezochte punten!
Met de voetpunten P en Q is de totale afstand van D tot E dan inderdaad minimaal!

Nou, ... laat eerst maar eens zien!



We kiezen ons assenstelsel met O het voetpunt van de hoogtelijn vanuit *C* op een horizontale as met daarop *A* en *B* met *A*(a,0) links (a: negatief) en *B*(b,0) rechts...).
Verder kiezen we (door vergroten / verkleinen) punt *C*(0,1) ...
Dit maakt veel rekenwerk een stuk makkelijker!
We gaan beginnen met het maken van de punten *D* en *E*.

En de eerste stap is het bepalen van de richtingscoëfficiënten van resp. *AC* en *BC*...
... dit door eerst de snijpunten te maken van de punten F en G, de snijpunten van de lijnen door (0,0) loodrecht op resp. *AC* en *BC*.

Welnu $rc_{AC} = \frac{1-0}{0-a} = -\frac{1}{a}$ en de vgl voor AC: $y = -\frac{1}{a}x + 1$ en omdat
$rc_{AC} \times rc_{BP} = -1$ geldt: *BP* : $y = a(x-b) = ax - ab$
lijn OD snijdt *AC* in: $y = ax$ en $y = -\frac{1}{a}x + 1$ (gelijkstellen:) $ax = -\frac{1}{a}x + 1$
$ax = -\frac{1}{a}x + 1 \Leftrightarrow ax + \frac{1}{a}x = 1$ en dus $\frac{a^2+1}{a} \cdot x = 1$ dus $x = \frac{a}{a^2+1}$ en $y = \frac{a^2}{a^2+1}$
Kortom: $F(\frac{a}{a^2+1}, \frac{a^2}{a^2+1})$
Omdat FD = FO geldt: $D(\frac{2a}{a^2+1}, \frac{2a^2}{a^2+1})$..
kijk naar de figuur!.. F ligt keurig in het midden.
Op exact dezelfde wijze kun je punt E "maken": en dit wordt: $E(\frac{2b}{b^2+1}, \frac{2b^2}{b^2+1})$
met punt $G(\frac{b}{b^2+1}, \frac{b^2}{b^2+1})$ netjes in het midden.
Nu gaan we *P* en *Q* vaststellen:
BP : $y = a(x-b) = ax - ab$ combineren met *AC* : $y = -\frac{1}{a}x + 1$
geeft: $ax + \frac{1}{a}x = 1 + \text{ab} \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a} \cdot x = 1 + ab$ en $x = \frac{(1+ab)a}{a^2+1}$
Dit weer terug invullen voor: $y = -\frac{1}{a} \cdot \frac{(1+ab) \cdot a}{a^2+1} + 1 = \frac{-(1+ab)}{a^2+1} + 1$
dus $y = \frac{-(1+ab)}{a^2+1} + 1 = \frac{-(1+ab)}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{a^2+1} = \frac{a^2-ab}{a^2+1}$
We hebben nu *P*$(\frac{(1+ab)a}{a^2+1}, \frac{a^2-ab}{a^2+1})$ en op dezelfde wijze maken we *Q*:
Q$(\frac{(1+ab)b}{b^2+1}, \frac{b^2-ab}{b^2+1})$ (merk op hoe dit op elkaar lijkt!)
Vervolgens maken we een vgl. van *DE* en tonen dat zowel *P* alsook *Q* daar op liggen:

Met $rc_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{\frac{2b^2}{b^2+1} - \frac{2a^2}{a^2+1}}{\frac{2b}{b^2+1} - \frac{2a}{a^2+1}} = \frac{\frac{2b^2 \cdot (a^2+1)}{b^2+1} - \frac{2a^2 \cdot (b^2+1)}{a^2+1}}{\frac{2b \cdot (a^2+1)}{b^2+1} - \frac{2a \cdot (b^2+1)}{a^2+1}}$
(het ziet er weer eens hopeloos uit!)
Toch dapper doorgaan!
$rc_{DE} = \frac{2b^2 - 2a^2}{2a^2b - 2ab^2 + 2b - 2a} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b - ab^2 + b - a}$ en nu komt (weer) een "truuk":
We gaan $(b-a)$ boven en onder buiten haakjes halen en wegdelen en gebruiken
$b^2 - a^2 = (b-a) \cdot (b+a)$

$$rc_{DE} = \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{-ab\cdot(b-a)+1\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{1-ab}$$

En de vgl. *DE* : $y - \frac{2b^2}{b^2+1} = \frac{b+a}{1-ab}\cdot\left(x - \frac{2b}{b^2+1}\right)$
Hierin gaan we de coördinaten van *Q* invullen en vinden:
$\frac{b^2-ab}{b^2+1} - \frac{2b^2}{b^2+1} = \frac{b+a}{1-ab}\cdot\left(\frac{(1+ab)b}{b^2+1} - \frac{2b}{b^2+1}\right)$

Ja, ik weet het! Ziet er weer hopeloos uit... en toch!?
er valt al wel een-en-ander weg ...

Vermenigvuldig nu links en rechts eens met b^2+1 ...
Je vindt dan: $-b(b+a) = \frac{b+a}{1-ab}\cdot(ab^2-b)$

Rechts halen we de factor $-b$ buiten haakjes en vinden:

$$-b(b+a) = \frac{b+a}{1-ab}\cdot -b\cdot(1-ab)$$

EN HET KLOPT ALS EEN BUS !!!!

Om te verifiëren of punt *P* ook op *DE* ligt is het slim om *DE* te herschrijven:

$$y - y_D = \frac{b+a}{1-ab}\cdot(x - x_D)$$

$y - \frac{2ab^2}{a^2+1} = \frac{b+a}{1-ab}\cdot\left(x - \frac{2a}{a^2+1}\right)$ en ook als we hier gaan invullen:
$P\left(\frac{(1+ab)a}{a^2+1}, \frac{a^2-ab}{a^2+1}\right)$ zien wij een “perfect match”... nou ja...
Tja wat zijn hier de “mitsen en maren”...?
Nou ... onder andere dat NIET MAG GELDEN: $a\cdot b = -1$ of $a\cdot b = 1$
In het eerste geval staan *AC* en *BC* al loodrecht op elkaar en we hadden verondersteld dat het een scherphoekige driehoek ABC was...
In het tweede geval hebben we een stomphoekige driehoek!
Het is leuk om te zien in Geogebra hoe dit inderdaad “ontaardt”.
Probeer maar!
https://www.geogebra.org/classic/zk8yc3jm
Je ziet in deze “Stelling” mathematische kenmerken terug die je misschien op deze website zag, zoals Het Punt van Torricelli, de Stelling van Johnson en die van Raves zelf. Bij die laatste zie je dat er bij elke willekeurige driehoek een ingeschreven driehoek bestaat, waarbij elke zijde loodrecht staat op een van de zijden van de “grote” driehoek en dat de coördinaten kunnen worden berekend!
Bedenk echter dat een cartesisch bewijs soms gewoon niet werkt.

Bijvoorbeeld bij de Stelling van Miquel, die een mooi verband geeft tussen 3 niet-even-grote cirkels, die wel een snijpunt gemeenschappelijk hebben. In 1838 beschreef Auguste Miquel dat de driehoek gevormd door de tweede snijpunten van de cirkels onderling een ingeschreven driehoek is van een willekeurige “grote” driehoek waarbij één van de punten op één van de cirkels ligt.
Gewoon te veel “onbekenden” in vergelijkingen van cirkels...

Teteringen februari 2024