De Stelling van De Lange… een korte versie:

Als de grafiek van een derdegraadsfunctie toppen heeft, dan is de x-coördinaat van het buigpunt precies het gemiddelde van die van de toppen.

We bekijken een algemene derdegraadsfunctie van de vorm: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

De aanname hierbij is dat we een "echte 3e-graadsfunctie hebben dus $a \neq 0$

Eerste deel: het midden van die toppen "maken"...

Welnu: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

en $f'(x) = 0$ als (abc-formule)

$$x = \frac{-2b \pm\sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a} \Leftrightarrow x = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

met uiteraard als voorwaarde dat $b^2 - 3ac > 0$ (merkwaardige "discriminant"!)

(Heb je gezien dat ik die factor 4 vanonder het wortelteken vandaan heb gehaald?
Zo niet: kijk nog eens rustig!)

Vanaf NU nemen we aan dat $b^2 - 3ac > 0$ geldt…

Dan hebben we twee "oplossingen": $x_1 = \frac{-b - W}{3a}$ en $x_2 = \frac{-b + W}{3a}$

met $W = \sqrt{b^2 - 3ac}$ (de "Wortel"...)

Het lijkt op de abc-formule .... maar dan net even anders!

We gaan nu eerst de x-coördinaat van het "gemiddelde" (of: "midden") bepalen:

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

Kijk heel goed en je ziet: $x_M = \frac{-b}{3a}$

De expressies met W vallen weg! (die met "min" tegen die met "plus")

Nu het "tweede deel van het bewijs": Ligt bij $x = \frac{-b}{3a}$ het buigpunt?

Welnu: met $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ volgt $f''(x) = 6ax + 2b$ en vul maar in...

Officieel moet men nog aantonen dat $f'(x)$ een extreme waarde heeft (max/min) ...

Daartoe volstaat de opmerking dat de grafiek van deze $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ een parabool is (aanname was en is nog steeds $a \neq 0$)

en als de discriminant: $4b^2 - 12ac > 0$ kortom $b^2 - 3ac > 0$ geldt

dan hebben we een minimum bij $a > 0$ en een maximum bij $a < 0$.

Het bewijs is hiermee rond.

Dit is de korte versie: over de y-coördinaten en hun midden hebben we het niet gehad ; daar is méér schrijf- en rekenwerk voor nodig en toch dagen wij -Alphons en ik – je uit om het eens te bekijken.

Teteringen 13-03-2023