De Stelling van De Lange

luidt:

Als de grafiek van een derdegraadsfunctie toppen heeft, dan ligt het buigpunt precies in het midden.

Je voelt al intuïtief aan dat dit klopt, want de afgeleide is een tweedegraads-expressie met nulpunten mits een discriminant positief is en de top van de grafiek van die 2^e graads-functie ligt in het midden van die "nulpunten", dus dáár heeft de afgeleide zijn extreme waarde. (Dit kreeg ik dan ook letterlijk van Alphons terug!)

Ik had een opgave over een derdegraadsfunctie uit de bundel van Getal& Ruimte gehaald waar de leerling (uit 5HAVO met wiskunde B) exact moest bepalen waar de verbindingslijn tussen de toppen de grafiek snijdt en dat dit snijpunt weer op die lijn lag.

Van mijn collega Alphons de Lange kreeg ik de opmerking dat de leerling niet mocht uitgaan van het feit dat dit punt precies het midden was van het lijnstuk tussen die toppen.... en ik was (en voelde mij meteen) uitgedaagd!

Hieronder komt een echt cartesisch bewijs zoals je op de website www.raves.nl gewend bent.

Zoals vaak komt er eerst een vereenvoudiging van "Het Probleem":

We bekijken een algemene derdegraadsfunctie van de vorm: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
maar brengen die na een translatie terug tot de vorm: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
Want als de Stelling hier geldt dan is met een translatie over $(0, d)$ alsnog het doel bereikt. De aanname hierbij is dat we een "echte 3^e-graadsfunctie hebben dus $a \neq 0$

Eerste deel: het midden van die toppen "maken"...
Welnu: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

en $f'(x) = 0$ als $x = \dfrac{-2b \pm\sqrt{4b^2-12ac}}{6a} \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$
met uiteraard als voorwaarde dat $b^2 - 3ac > 0$ (merkwaardige "discriminant"!)

(Heb je gezien dat ik die factor 4 vanonder het wortelteken vandaan heb gehaald? Zo niet: kijk nog eens rustig!)

Vanaf NU nemen we aan dat $b^2 - 3ac > 0$ geldt…
Dan hebben we twee "oplossingen": $x_1 = \dfrac{-b-W}{3a}$ en $x_2 = \dfrac{-b+W}{3a}$
met $W = \sqrt{b^2 - 3ac}$ (de "Wortel"...)
Wat verderop zal blijken is dat alle expressies ("termen") met W (of oneven macht van W) zullen verdwijnen!

Heb je tot nu toe alles goed op een rijtje?
Het lijkt op de abc-formule .... maar dan net even anders!

We gaan nu eerst de x-coördinaat van het "midden" bepalen:

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

Kijk heel goed en je ziet: $x_M = \dfrac{-b}{3a}$

De expressies met W vallen weg!

Nu maken we de y-coördinaat van het midden, NADAT we de y-coördinaat van het (bijbehorende) punt op de grafiek berekend hebben en die is:

$$f(x_M) = a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) =$$

$$= \frac{-ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a}$$ (nu gaan we bij de eerste term de a wegstrepen en die met de 2e term gelijknamig maken")

$$= \frac{-b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}$$

$$= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a}$$

Het midden van de toppen moet hieraan gelijk worden!

$$f(x_1) = \frac{a\cdot(-b-W)^3}{27a^3} + \frac{b\cdot(-b-W)^2}{9a^2} + \frac{c\cdot(-b-W)}{3a}$$

$$= \frac{(-b-W)^3}{27a^2} + \frac{b\cdot(-b-W)^2}{9a^2} + \frac{c\cdot(-b-W)}{3a}$$

$$= \frac{(-b-W)^3}{27a^2} + \frac{b\cdot(-b-W)^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} - \frac{cW}{3a}$$

en dit kan -gezien de eerste 2 termen- nog verder vereenvoudigd worden!

$$f(x_2) = \frac{a\cdot(-b+W)^3}{27a^3} + \frac{b\cdot(-b+W)^2}{9a^2} + \frac{c\cdot(-b+W)}{3a}$$

$$= \frac{(-b+W)^3}{27a^2} + \frac{b\cdot(-b+W)^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + \frac{cW}{3a}$$

Bij het optellen alleen al zullen de termen met W verdwijnen (de ene is "plus" en de andere is "min"); ook die met W^3 vallen tegen elkaar weg:
EERST gaan we eens kijken wat $(-b-W)^3$ uitgeschreven is net als $(-b+W)^3$

Welnu: $(-b-W)^3 = -b^3 - 3b^2W - 3bW^2 - W^3$ en

$(-b+W)^3 = -b^3 + 3b^2W - 3bW^2 + W^3$

rechtstreeks opgeteld is dit: $(-b-W)^3+(-b+W)^3=2\cdot(-b^3-3bW^2)$
daarmee wordt: $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ al een stuk makkelijker om te overzien, met name het eerste en laatste stuk!
En die W^2 kan ook makkelijker!

Nu die "middelste term" met die $(-b+W)^2$ en die $(-b+W)^2$
Je voelt al aankomen dat bij de optelling daarbij ook een-en-ander verdwijnt!
Want wat is $(-b+W)^2 = b^2-2bW+W^2$ en
$(-b-W)^2 = b^2+2bW+W^2$
Bij het rechtstreeks optellen verdwijnen (weer) de termen met W en
denk eraan dat die middelste term met $\frac{2b^2+2W^2}{9a^2}$ nog gehalveerd moet worden!
Wat houden we van $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ dan nog over?

$$\frac{-b^3-3bW^2}{27a^2}+\frac{b\cdot(b^2+W^2)}{9a^2}-\frac{bc}{3a}$$ en met $W^2=b^2-3ac$:

$$=\frac{-b^3-3b(b^2-3ac)}{27a^2}+\frac{b\cdot(b^2+b^2-3ac)}{9a^2}-\frac{bc}{3a}$$

$$=\frac{-b^3-3b^3+9abc)}{27a^2}+\frac{2b^3-3abc)}{9a^2}-\frac{bc}{3a}$$

$$=\frac{-4b^3+9abc)}{27a^2}+\frac{2b^3-3abc)}{9a^2}-\frac{bc}{3a}$$

$$=\frac{-4b^3+9abc)}{27a^2}+\frac{6b^3-9abc)}{27a^2}-\frac{bc}{3a}$$

$$=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}$$

$$=f(x_M)\quad(!)$$

Nu het "tweede deel van het bewijs": Ligt bij $x=\frac{-b}{3a}$ het buigpunt?
Welnu: met $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ volgt $f''(x)=6ax+2b$ en vul maar in...
Officieel moet men nog aantonen dat $f'(x)$ een extreme waarde heeft (max/min) ...
Daartoe volstaat de opmerking dat de grafiek van deze $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ een parabool is (aanname was en is nog steeds $a\neq 0$)
en als de discriminant: $4b^2-12ac>0$ kortom $b^2-3ac>0$ geldt dan hebben we een minimum bij $a>0$ en een maximum bij $a<0$.
Het cartesische bewijs is hiermee rond.
Aan een interactieve Geogebra-animatie wordt gewerkt!

Teteringen 13-03-2023