…… luidt als volgt:

In een willekeurige driehoek ABC kan men uit een punt C een hoogtelijn trekken loodrecht op de overstaande zijde AB en vanuit het gevonden snijpunt S weer een lijn loodrecht op BC en vanuit dat snijpunt loodrecht op AC en als men in deze richting (volgorde) door werkt komen de lijnen steeds dichter bij elkaar en vormen uiteindelijk ("limiet") een driehoek DEF die gelijkvormig is met ΔABC.

De coördinaten van de punten D, E en F zijn met een formule -vooraf- uit te rekenen, als men die van A, B en C heeft…. (zie verderop *)**

Als men de andere richting (volgorde) neemt, dus vanuit S een lijn loodrecht op AC en vanuit het gevonden snijpunt vervolgens loodrecht op BC en in deze volgorde verder gaat, komen de lijnen (ook) steeds dichter bij elkaar en vormen uiteindelijk in de limiet een driehoek GHI die congruent is met driehoek DEF (exact even groot).

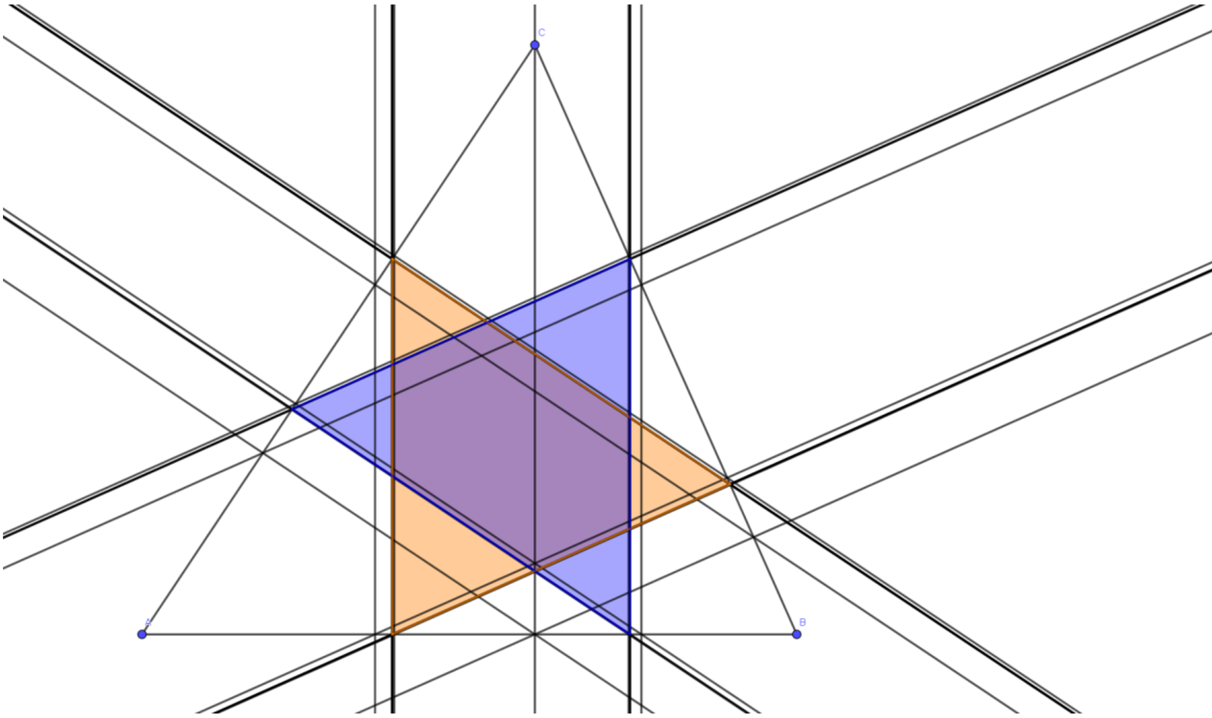
Ook de coördinaten van de punten G, H en I liggen vast!…. (zie verderop *)**

Hierbij zijn uitzonderingsgevallen te onderscheiden als een der hoeken een rechte hoek is, zie (*) …. Het "convergeren" gaat dan ineens heel snel!

Beide driehoeken staan "loodrecht" op de oorspronkelijke driehoek, zou bijv. zijde AB horizontaal zijn, dan is er een verticale zijde in zowel ΔDEF als in ΔGHI

De opdracht voor nu is: . . . . pak een vel papier en een geodriehoek en teken eens een willekeurige driehoek met daarin de eerste hoogtelijn (de lijn vanuit de top (hoekpunt C) loodrecht op zijde AB (heb jij die ook horizontaal getekend?.....)

Ga nu verder met de volgende loodlijnen! Doe het ook in de andere volgorde . . . .
Dit is echt leuk werk! Ziet jouw figuur er ook ongeveer uit als hieronder?



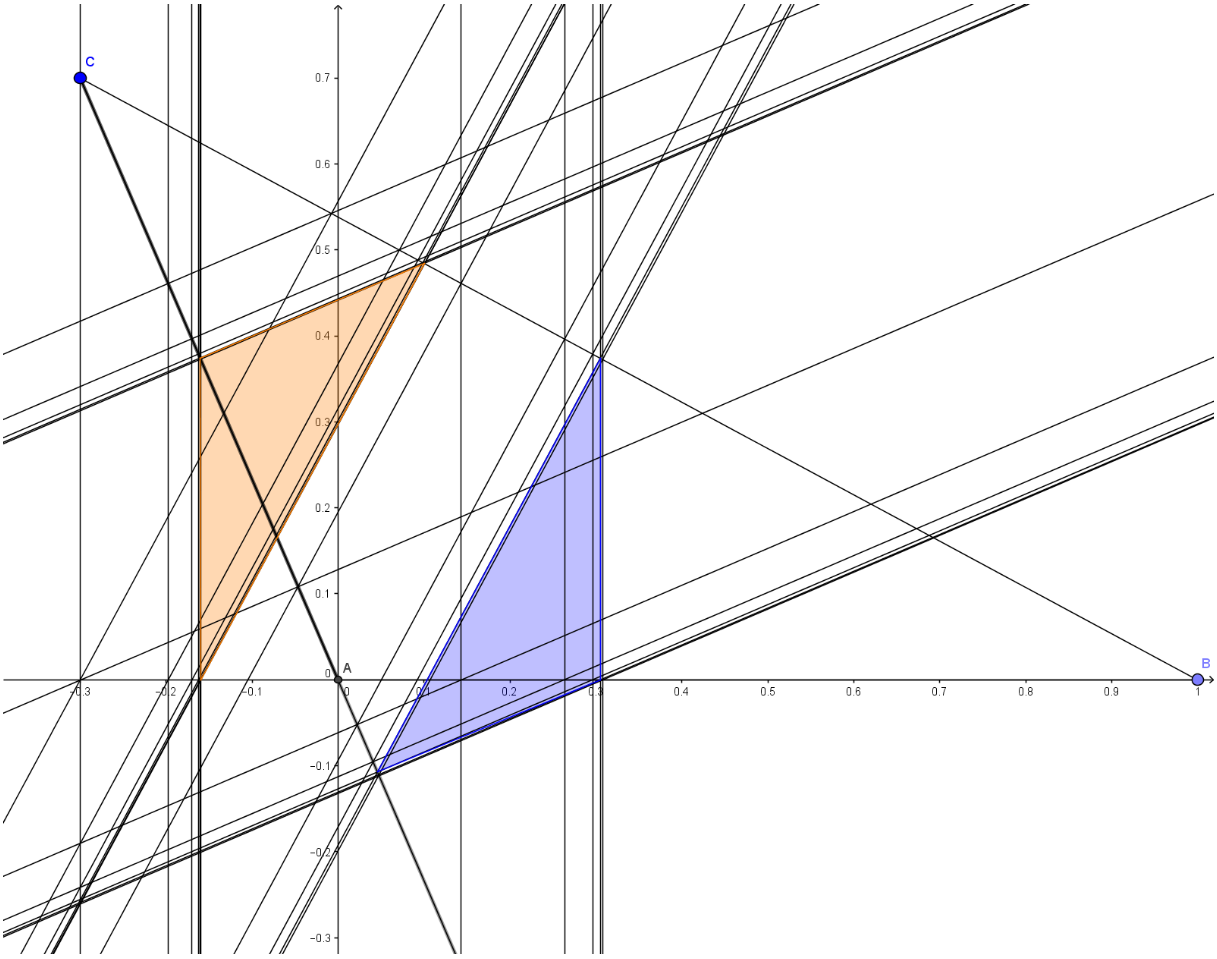
Op de middelbare school krijg je zelden een “limiet” van 2D-figuren, laat staan van 3D-dingen…..
Op deze website wil ik ook niet overdrijven….. maar (wel) een beetje inzicht geven in meetkunde voor gevorderden!.....

Die gekleurde driehoeken….

Zijn ze echt exact even groot? ….. Het is misschien niet accuraat genoeg? De hulplijnen staan er wel keurig!

Het lijkt er op dat ze dezelfde (verticale) lengte hebben…. Maar kan dat wel als de linkerzijde AC veel steiler loopt dan de rechterzijde BC? Of juist andersom? Past dat wel precies?

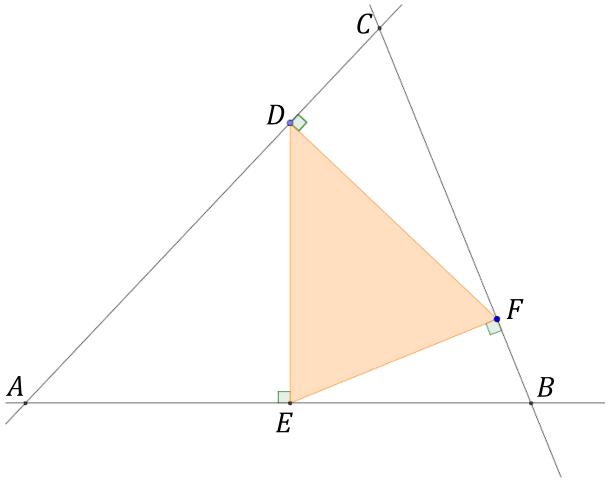
En wat gebeurt er als men stomphoekige driehoeken neemt?



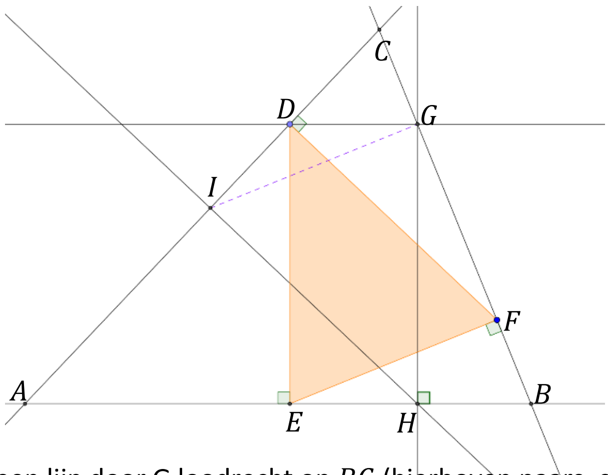
Wel… zie boven! Weer twee driehoeken die dezelfde verticale lengte lijken te hebben, nu echter deels buiten ΔABC.
Dat er convergentie optreedt is wel duidelijk, maar zijn die twee driehoeken UNIEK of niet?
Kijk eens naar de volgende figuur:

We starten hier met een driehoek waarvan zijde DE **verticaal** is.

Loodrecht op zijde DE (vanuit punt E) trekken we een horizontale lijn…..loodrecht op DF een lijn door punt D die de horizontale snijdt in punt A, loodrecht op EF (uiteraard door punt F) een lijn die de horizontale snijdt in punt B De twee (schuine) lijnen snijden verder (boven) in punt C….



Volgens de stelling moet er een verticaal lijnstuk GH zijn, even lang als DE . . .
We trekken dus een horizontale lijn door punt D en snijden die met BC en vinden snijpunt G.
Vanuit G vervolgens een lijn loodrecht op AB en we vinden snijpunt H.



Nu maken we een lijn door G loodrecht op BC (hierboven paars en onderbroken met streepjes) en snijden die met AC. Het snijpunt van deze lijnen is dan punt I.
Maar dan moeten we nog wel aantonen dat lijn $IH \perp AC$.

Daartoe starten we met een assenstelsel met daarin $E(0,0)$; $D(0,1)$ en $F(a,b)$.
We volgen nu gewoon de stappen (maar dan die van het alternatief) van de constructie:

Te beginnen met de vergelijking (vgl.) van EF : $y = \frac{b}{a}x$ dan is de vgl. van BC : $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + b$

Deze snijden met de horizontale lijn $y = 1$ en we vinden: $1 = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + b \Leftrightarrow \frac{a}{b}x = \frac{a^2+b^2}{b} - 1$

Na links en rechts te vermenigvuldigen met b ontstaat: $ax = a^2 + b^2 - b$ en $x_G = \frac{a^2+b^2-b}{a}$

De coördinaten van H zijn nu bekend: $H(\frac{a^2+b^2-b}{a}, 0)$

DF heeft vgl. $y = \frac{b-1}{a}x + 1$ dus die van AC : $y = \frac{a}{1-b}x + 1$ en blijkt: $A(\frac{b-1}{a}, 0)$

de coördinaten van punten A ; B en C liggen door die van D, E en F allemaal vast!

Reken na dat: $B(\frac{a^2+b^2}{a}, 0)$ en $C\left(\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right) \cdot (1-b), a^2 + b^2 - b + 1\right)$

Eerst maar eens punt I vinden: $AC: y = \frac{a}{1-b}x + 1$ combineren met de lijn door G loodrecht op BC

$y - 1 = \frac{b}{a}\left(x - \frac{a^2+b^2-b}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a}\left(x - \frac{a^2+b^2-b}{a}\right) + 1$ dus $\frac{b}{a}\left(x - \frac{a^2+b^2-b}{a}\right) = \frac{a}{1-b}x$

$\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right) = \frac{a}{1-b}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a}x - \frac{a}{1-b}x = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a}x + \frac{a}{b-1}x = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right)$

$\frac{b^2-b+a^2}{a(b-1)}x = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right)$ dus $x_I = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2+b^2-b}{a}\right) \cdot \frac{a(b-1)}{b^2-b+a^2} = \frac{b^2-b}{a}$ en $y_I = \frac{a}{1-b} \cdot \frac{b(b-1)}{a} + 1 = 1 - b$

Vooral die laatste waarde pakt onverwacht “mooi” uit!

Het verschil in de x-coördinaten is: $x_G - x_I = \frac{a^2+b^2-b}{a} - \frac{b^2-b}{a} = a$

Dat klopt geheel naar verwachting; nu nog aantonen dat $IH \perp AC$

$y_I - y_H = 1 - b$ en $x_I - x_H = \frac{b^2-b}{a} - \frac{a^2+b^2-b}{a} = -a$ lijn IH heeft dus rc= $\frac{1-b}{-a}$ en

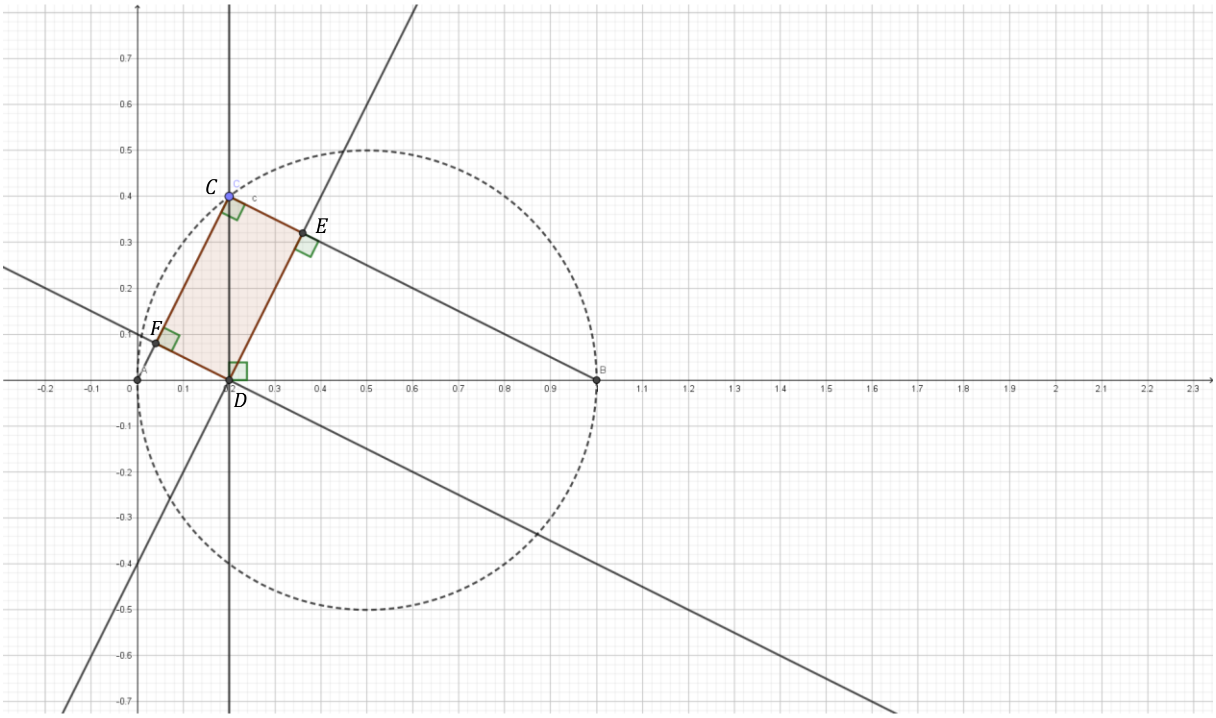
$AC: y = \frac{a}{1-b}x + 1$ heeft rc=$\frac{a}{1-b}$ Het product van deze richtingscoëfficiënten is −1.

Concl. Driehoeken ΔDEF en ΔGHI zijn exact even groot en liggen op driehoek ΔABC

(**) Bijzonderheden bij De Stelling zijn o.a. :

1. De lijnen EF en IH snijden elkaar precies op de hoogtelijn (vanuit C) en in het geval van een scherphoekige driehoek ABC $binnen$ en in het geval van een stomphoekige driehoek: $buiten$ ΔABC
2. De paren zijden van driehoeken ΔDEF en ΔGHI lopen (altijd) evenwijdig

Tja, wat als er een rechte hoek (*) in zit? . . . . Dan gaat het convergeren heel snel: (Er zijn dan helemaal geen G, H en I. . . . . *de evenwijdigheid is dan met de zijden van driehoek ABC zelf*)



Hier is hoek $C = 90°$ en met $C(a, b)$ blijkt de oppervlakte van elk van de deeldriehoeken $\frac{1}{2}b^3$ en **de oppervlakte van de rechthoek: b^3**.

Die oppervlakte blijkt geheel onafhankelijk van de x-coördinaat te zijn. . . . nou ja. . . volgens Thales (en Pythagoras) liggen de coördinaten van een punt op een rechthoekige driehoek vast en ligt punt C op een cirkel met middellijn AB…

Tamelijk veel driehoekjes zijn nu gelijkvormig! Het is ook leuk om weer eens wat aan goniometrie te

doen: In ΔACD is $\sin(\angle \mathrm{A}) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en in ΔAED is $\sin(\angle \mathrm{A}) = \frac{FD}{a}$ dus $FD = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Dit is ook te zien via gelijkvormigheid…. Verder is (analoog) $CF = b\sin(\angle \mathrm{A}) = \frac{b \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

De oppervlakte van de rechthoek is dan $CF \cdot FD = \frac{ab^3}{a^2+\boldsymbol{b^2}} = \frac{ab^3}{a^2+\boldsymbol{a(1-a)}} = \frac{ab^3}{a}$

waarbij gebruikt is de stelling over hoe een hoogtelijn een rechthoekige driehoek verdeeld:
met hoogte h die de schuine zijde verdeeld in stukken p en q , geldt $h^2 = pq$
(zoals elders op deze website is te zien).
Met de overige “speciale” gevallen namelijk met $a = 0$: $\angle A = 90°$ en met $C(0, b)$dan wel met $a = 1$: $\angle B = 90°$ en met $C(1, b)$ wordt het verhaal echter saai!

(***) Het meest bijzondere is dat de coördinaten van D vooraf uitgerekend kunnen worden en in het geval dat $A(0,0)$; $B(1,0)$ en $C(a,b)$ zijn: $D(\frac{a}{a^2+b^2-a+1}, \frac{b}{a^2+b^2-a+1})$

Het bewijs daarvan schuilt in de vergrotingsfactor van driehoek ABC ten opzichte van ΔDEF:
We hadden hierboven gevonden $A(\frac{b-1}{a}, 0)$ en $B(\frac{a^2+b^2}{a}, 0)$ Het verschil is de vergrotingsfactor ten opzichte van ΔDEF en die bedraagt $\frac{a^2+b^2-b+1}{a}$, (terwijl het verticale lijnstuk DE lengte 1 had)
Dit was ten opzichte van punt $F(a, b)$ . . .

Ga je echter uit van driehoek ABC met $A(0,0)$; $B(1,0)$ en $C(a,b)$ dan is er een verkleiningsfactor nodig! En wel: $\frac{1}{a^2+b^2-a+1}$. (Hierbij is zorgvuldig gelet op het wisselen van x- en y-coördinaten)

De Opdracht (aan mijn leerlingen uit klas 5VWO (wiskunde B) luidt: bewijs de bijzonderheden (**).
Kijk eventueel nog eens op de link: ...in het scherphoekige geval . Daar is dat snijpunt het duidelijkst te zien. En bewijs ook de tweede bijzonderheid: dat de paren corresponderende zijden in ΔDEF en ΔGHI (altijd) evenwijdig lopen . . . ook in het stomphoekige geval…. telt weer (1x) mee “als punt” . . . .

Valkenisse juni 2018