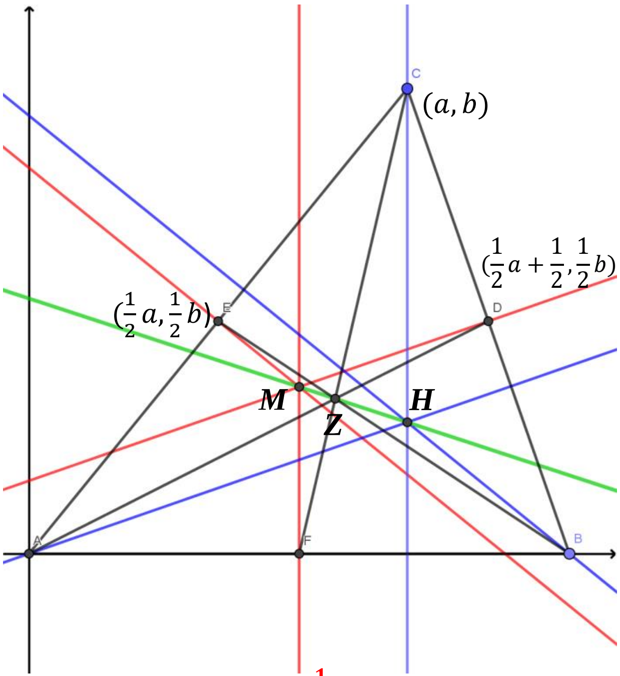
De vergelijking van Euler….   www.raves.nl

Dhr. L. Euler was een bijzonder-bedreven wiskundige met een energieniveau dat aan het ongelooflijke grenst… Was hij “groter dan Einstein”?.... Misschien wel. . . . . het gaat er niet om te vergelijken. . . . Ieder draagt zijn steentje (-s) bij tot de wetenschap. . . .
Euler was een wel hele grote met een enorm aantal publicaties en stellingen! Eentje ervan wil ik graag onder de aandacht brengen: **De rechte van Euler:**

In een willekeurige driehoek liggen het hoogtepunt (H); het zwaartepunt (Z) en het middelpunt (M) op één rechte lijn (“de rechte van Euler”)



Het hoogtepunt is het snijpunt van de **hoogtelijnen**; het zwaartepunt is het snijpunt van de **zwaartelijnen** en het middelpunt het snijpunt van de **middelloodlijnen** van een driehoek.

Wij zien het als een uitdaging om het cartesisch te bewijzen:

Zoals gebruikelijk nemen we ***A(0,0); B(1,0)*** en ***C(a,b)*** zoals in de figuur hiernaast….

Dat de drie middelloodlijnen in een willekeurige driehoek door één punt gaan, moeten we eerst nog bewijzen:

Bij ons is de vergelijking (vgl.) van de eerste middelloodlijn: $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ **(I)**

De tweede middelloodlijn heeft vgl.: $\boldsymbol{y - \frac{1}{2}b = -\frac{a}{b} \cdot \left(x - \frac{1}{2}a\right)}$ **(II)**

immers deze lijn staat loodrecht op de lijn $\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}$ door ***A(0,0)*** en ***C(a,b)***

En de derde heeft vgl. : $\boldsymbol{y - \frac{1}{2}b = \frac{1-a}{b} \cdot \left(x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right)}$ **(III)**

immers deze lijn staat loodrecht op de lijn $\boldsymbol{y = \frac{b}{a-1}(x-1)}$ door ***B(1,0)*** en ***C(a,b)***

en gaat ook door het juiste midden.

(I) en **(II)** combineren (invullen) geeft: $y = -\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}b \ldots = \boldsymbol{\frac{a^2-a+b^2}{2b}}$

(I) en **(III)** combineren (invullen) geeft:$y = \frac{1-a}{b} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b \ldots = \boldsymbol{\frac{a^2-a+b^2}{2b}}$

Het klopt weer en we hebben de coördinaten van het middelpunt van de **omgeschreven** cirkel van driehoek $\boldsymbol{ABC}$!!

Voor de coördinaten van het zwaartepunt en het hoogtepunt verwijs ik naar de links op deze website en citeer daaruit: $Z(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}b)$ en $H(a, \frac{a-a^2}{b})$.

En we gaan dapper verder met de vgl. van ZH: $y - \frac{1}{3}b = m \cdot \left(x - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}\right)$ met

richt.coeff. $m = \frac{y_H - y_Z}{x_H - x_Z} = \frac{\frac{a-a^2}{b} - \frac{1}{3}b}{a - \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{a-a^2}{b} - \frac{\frac{1}{3}b^2}{b}}{\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}} = \frac{a - a^2 - \frac{1}{3}b^2}{\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}}$

We hebben hiermee de vergelijking van De Rechte Van Euler gevonden:

$$y-\frac{1}{3}b=\frac{a-a^2-\frac{1}{3}b^2}{\frac{2}{3}ab-\frac{1}{3}b}\cdot\left(x-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\right)$$

Nu nog de coörd.'n van $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{a^2-a+b^2}{2b}\right)$ invullen:

$$\frac{a^2-a+b^2}{2b}-\frac{1}{3}b=\frac{a-a^2-\frac{1}{3}b^2}{\frac{2}{3}ab-\frac{1}{3}b}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2-a+b^2-\frac{2}{3}b^2}{2b}=\frac{a-a^2-\frac{1}{3}b^2}{\frac{2}{3}ab-\frac{1}{3}b}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}a\right)\ \Leftrightarrow$$ (rechterlid boven en onder met 6 vermenigvuldigen….)

$$\frac{a^2-a+\frac{1}{3}b^2}{2b}=\frac{a-a^2-\frac{1}{3}b^2}{(2a-1)2b}\cdot(1-2a)$$ (let op de vermenigvuldiging in de noemer met 3×2 …..)

Het enige wat we nog moeten doen is verifiëren of aan de voorwaarden is voldaan, c.q. of ergens een noemer nul wordt. In dat laatste geval is er een speciale (uitzonderings-) situatie, die nader bekeken dient te worden.

Om te beginnen mag uiteraard NIET gewerkt worden met $b=0$ (dan is er ook geen driehoek meer (over)!
In de vgl. van lijn BC staat in de noemer $\boldsymbol{a-1}$ en als die nul zou worden dan loopt BC verticaal….

Zowel de hoogtelijn als de middelloodlijn zouden dan echter horizontaal lopen en de theorie hierover (lees: hierboven) blijft keurig in stand! Met name de coördinaten van M blijven dan geldig.

Het enige aandachtspunt is de noemer in de richtingscoëfficiënt van de (groene) lijn: $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{3}b$.
Als (onder onze aanname) $b\neq 0$ dan kan de noemer toch nul worden indien $a=\frac{1}{2}$.
In dat (triviale) geval is er sprake van een gelijkbenige driehoek waarbij het zwaartepunt, zowel als het midden alsook het hoogtepunt op de verticale lijn $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ liggen.

Dit is goed te zien in de GeoGebra App waarop je hier: https://ggbm.at/arJRfgqD kunt klikken!

Valkenisse juni 2018